1 (1) $(2x+1)^3=(2x)^3+3\cdot(2x)^2\cdot1+3\cdot2x\cdot1^2+1^3=8x^3+12x^2+6x+1$

(2) $(a+3b)(a^2-3ab+9b^2)=(a+3b)\{a^2-a\cdot3b+(3b)^2\}$

$=a^3+(3b)^3=a^3+27b^3$

2 (1) $x^3-8=x^3-2^3=(x-2)(x^2+x\cdot2+2^2)=(x-2)(x^2+2x+4)$

(2) $64p^3+125q^3=(4p)^3+(5q)^3=(4p+5q)\{(4p)^2-4p\cdot5q+(5q)^2\}$

$=(4p+5q)(16p^2-20pq+25q^2)$

3 (1) $(x+1)^7={}_7C_0x^7+{}_7C_1x^6\cdot1+{}_7C_2x^5\cdot1^2+{}_7C_3x^4\cdot1^3$

$+{}_7C_4x^3\cdot1^4+{}_7C_5x^2\cdot1^5+{}_7C_6x\cdot1^6+{}_7C_7\cdot1^7$

$=x^7+7x^6+21x^5+35x^4+35x^3+21x^2+7x+1$

(2) $(3a+2b)^5$ の展開式の一般項は　${}_5C_r(3a)^{5-r}(2b)^r={}_5C_r3^{5-r}\cdot2^ra^{5-r}b^r$

a^2b^3 の項なので　$r=3$

よって，求める係数は　${}_5C_3\times3^2\times2^3=720$

4 (1)

$$\begin{array}{rr} & 2x+11 \\ x-2\,\big) & 2x^2+7x-6 \\ & \underline{2x^2-4x} \\ & 11x-6 \\ & \underline{11x-22} \\ & 16 \end{array}$$

商 $2x+11$，余り 16

(2)

$$\begin{array}{rr} & x+6 \\ x^2-x-1\,\big) & x^3+5x^2-4x+2 \\ & \underline{x^3-x^2-x} \\ & 6x^2-3x+2 \\ & \underline{6x^2-6x-6} \\ & 3x+8 \end{array}$$

商 $x+6$，余り $3x+8$

5 等式の右辺を x について整理すると

$2x^2-5x+10=ax^2+(-a+b)x+(-b+c)$

両辺の同じ次数の項の係数を比較して　$2=a$，$-5=-a+b$，$10=-b+c$

これを解いて　$a=2$，$b=-3$，$c=7$

6 (1) x，y が実数であるから，$x-1$，$x-y$ は実数である。

よって　$x-1=0$，$x-y=0$

これを解いて　$x=1$，$y=1$

(2) x，y が実数であるから，$x+3y$，$3x-2y$ は実数である。

よって　$x+3y=5$，$3x-2y=-18$

これを解いて　$x=-4$，$y=3$

←a，b が実数で $a+bi=0$ のとき $a=0$，$b=0$

7 2次方程式の判別式を D とする。

(1) $D=7^2-4\cdot4\cdot3=1>0$

よって，この2次方程式は異なる2つの実数解をもつ。

(2) $\dfrac{D}{4}=(-1)^2-3\cdot5=-14<0$

よって，この2次方程式は異なる2つの虚数解をもつ。

8 解と係数の関係から　$\alpha+\beta=6$，$\alpha\beta=11$

(1) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=6^2-2\cdot11=14$

(2) $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta=14-2\cdot11=-8$

← ax^2+bx+c
$=a(x-\alpha)(x-\beta)$
$=a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}$
$=ax^2-a(\alpha+\beta)x+a\alpha\beta$

(3) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=6^3-3\cdot11\cdot6=18$

別解　$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)=6(14-11)=18$

9 (1) $P(x)=x^3+5x^2+2x-8$ とすると

$P(1)=1^3+5\cdot1^2+2\cdot1-8=0$

よって，$P(x)$ は $x-1$ を因数にもつ。

右の割り算から

$x^3+5x^2+2x-8=(x-1)(x^2+6x+8)$

さらに因数分解して

$x^3+5x^2+2x-8=(x-1)(x+2)(x+4)$

$$\begin{array}{rr} & x^2+6x+8 \\ x-1\,\big) & x^3+5x^2+2x-8 \\ & \underline{x^3-x^2} \\ & 6x^2+2x \\ & \underline{6x^2-6x} \\ & 8x-8 \\ & \underline{8x-8} \\ & 0 \end{array}$$

← $P(x)$ に適当な値を代入して，値が0になるかどうか調べる。

(2) $P(x)=6x^3-13x^2+x+2$ とすると

$P(2)=6\cdot2^3-13\cdot2^2+2+2=0$

よって，$P(x)$ は $x-2$ を因数にもつ。

右の割り算から

$6x^3-13x^2+x+2=(x-2)(6x^2-x-1)$

さらに因数分解して

$6x^3-13x^2+x+2=(x-2)(2x-1)(3x+1)$

$$\begin{array}{rr} & 6x^2-x-1 \\ x-2\,\big) & 6x^3-13x^2+x+2 \\ & \underline{6x^3-12x^2} \\ & -x^2+x \\ & \underline{-x^2+2x} \\ & -x+2 \\ & \underline{-x+2} \\ & 0 \end{array}$$

10 (1) $P(x)=x^3-13x-12$ とすると　$P(-1)=-1+13-12=0$

よって，$P(x)$ は $x+1$ を因数にもち

$P(x)=(x+1)(x^2-x-12)=(x+1)(x+3)(x-4)$

$P(x)=0$ から　$x+1=0$　または　$x+3=0$　または　$x-4=0$

したがって　$x=-1$，-3，4

← まず，左辺を因数分解することを考える。

(2) 左辺を因数分解すると　$(x^2-2)(x^2-9)=0$

よって　$x^2-2=0$　または　$x^2-9=0$　したがって　$x=\pm\sqrt{2}$，±3

(3) $P(x)=x^3-8x+8$ とすると　$P(2)=8-16+8=0$

よって，$P(x)$ は $x-2$ を因数にもち　$P(x)=(x-2)(x^2+2x-4)$

$P(x)=0$ から　$x-2=0$　または　$x^2+2x-4=0$

したがって　$x=2$，$-1\pm\sqrt{5}$

(4) $P(x)=x^3-x^2+8x+10$ とすると　$P(-1)=-1-1-8+10=0$

よって，$P(x)$ は $x+1$ を因数にもち　$P(x)=(x+1)(x^2-2x+10)$

$P(x)=0$ から　$x+1=0$　または　$x^2-2x+10=0$

したがって　$x=-1$，$1\pm3i$

11 (1) $\mathrm{AB}=\sqrt{(-1-3)^2+\{4-(-2)\}^2}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$

(2) $\mathrm{AB}=\sqrt{(-2-5)^2+(3-3)^2}=\sqrt{49}=7$

別解　A，B の y 座標が同じであるから，2点間の距離は

$|-2-5|=|-7|=7$

12 (1) $y-6=\dfrac{10-6}{9-(-3)}\{x-(-3)\}$　すなわち　$y=\dfrac{1}{3}x+7$

(2) 2点の x 座標がともに -4 で等しいから　$x=-4$

13 円①は中心が原点，半径が3の円である。

また，円②は中心が点 $(-3,\ 1)$，半径が2の円である。

よって，2つの円の中心間の距離 d は　$d=\sqrt{(-3)^2+1^2}=\sqrt{10}$

また，2つの円の半径の差は　$3-2=1$

　　　　　　半径の和は　$3+2=5$

半径の差$<d<$半径の和　であるから，2つの円①，②は2点で交わる。

14 (1) 点Pの座標を$(x,\ y)$とする。

Pに関する条件は　$AP:BP=4:3$

これより　$3AP=4BP$　　すなわち　$9AP^2=16BP^2$

$AP^2=(x+4)^2+y^2$, $BP^2=(x-3)^2+y^2$

を代入すると　$9\{(x+4)^2+y^2\}=16\{(x-3)^2+y^2\}$

整理すると　$x^2-24x+y^2=0$　　すなわち　$(x-12)^2+y^2=12^2$

したがって，点Pは円$(x-12)^2+y^2=12^2$上にある。

逆に，この円上のすべての点$P(x,\ y)$は，条件を満たす。　← 逆の確認をする。

よって，求める軌跡は，点$(12,\ 0)$を中心とする半径12の円である。

(2) 点P，Qの座標をそれぞれ$(x,\ y)$，$(s,\ t)$とする。

Qは円$x^2+y^2=9$上にあるから　$s^2+t^2=9$ ……①

また，Pは線分AQを$3:1$に内分する点であるから　$x=\dfrac{3s+2}{4}$，$y=\dfrac{3}{4}t$

すなわち　$s=\dfrac{4x-2}{3}$，$t=\dfrac{4}{3}y$

これらを①に代入すると　$\dfrac{(4x-2)^2}{9}+\dfrac{16}{9}y^2=9$

整理すると　$\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{9}{4}\right)^2$

したがって，点Pは円$\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{9}{4}\right)^2$上にある。

逆に，この円上のすべての点$P(x,\ y)$は，条件を満たす。　← 逆の確認をする。

よって，求める軌跡は，点$\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$を中心とする半径$\dfrac{9}{4}$の円である。

15 (1) この領域は，円$(x-2)^2+(y-1)^2=9$の内部と直線$y=3x-2$の下側に共通する部分である。

すなわち，次の図の斜線部分である。ただし，境界線を含まない。

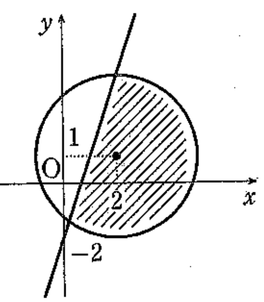
(2) 不等式$(x-y+1)(2x+y+1)<0$が成り立つことは

$\begin{cases}x-y+1>0\\2x+y+1<0\end{cases}$　または　$\begin{cases}x-y+1<0\\2x+y+1>0\end{cases}$　← 境界線は，2直線 $y=x+1$，$y=-2x-1$

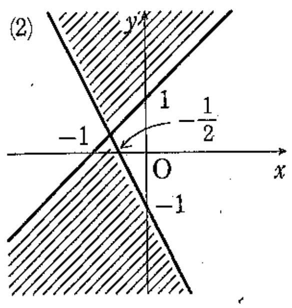
が成り立つことと同じである。

よって，求める領域は次の図の斜線部分である。ただし，境界線を含まない。

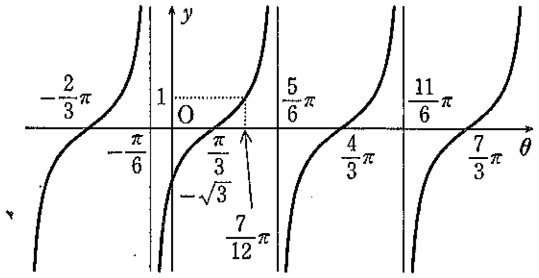
(1)



(2)

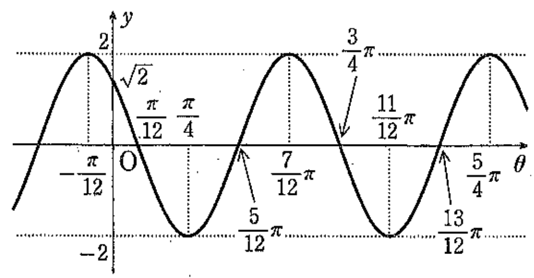


16 (1) このグラフは，$y=\tan\theta$のグラフをθ軸方向に$\dfrac{\pi}{3}$だけ平行移動したもので，次のようになる。周期はπである。



(2) $2\cos\left(3\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=2\cos3\left(\theta+\dfrac{\pi}{12}\right)$

このグラフは，$y=2\cos3\theta$のグラフをθ軸方向に$-\dfrac{\pi}{12}$だけ平行移動したもので，次のようになる。周期は$2\pi\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}\pi$である。　← $k>0$のとき，$\sin k\theta$，$\cos k\theta$の周期は$\dfrac{2\pi}{k}$



17 (1) $\sin105^\circ=\sin(60^\circ+45^\circ)=\sin60^\circ\cos45^\circ+\cos60^\circ\sin45^\circ$　← $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

(2) $\tan\dfrac{7}{12}\pi=\tan\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\tan\dfrac{\pi}{3}+\tan\dfrac{\pi}{4}}{1-\tan\dfrac{\pi}{3}\tan\dfrac{\pi}{4}}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}\times1}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}$　← $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$=\dfrac{(\sqrt{3}+1)^2}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}=\dfrac{4+2\sqrt{3}}{-2}=-2-\sqrt{3}$

(3) $\cos\dfrac{11}{12}\pi=\cos\left(\dfrac{2}{3}\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\dfrac{2}{3}\pi\cos\dfrac{\pi}{4}-\sin\dfrac{2}{3}\pi\sin\dfrac{\pi}{4}$　← $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$=-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

18 (1) 方程式を変形すると　$\sin2\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0\leqq\theta<2\pi$より$0\leqq2\theta<4\pi$であるから　$2\theta=\dfrac{5}{4}\pi,\ \dfrac{7}{4}\pi,\ \dfrac{13}{4}\pi,\ \dfrac{15}{4}\pi$

したがって　$\theta=\dfrac{5}{8}\pi,\ \dfrac{7}{8}\pi,\ \dfrac{13}{8}\pi,\ \dfrac{15}{8}\pi$

(2) 方程式を変形すると　$(2\cos^2\theta-1)+\sqrt{3}\cos\theta+1=0$　← $\cos2\theta=2\cos^2\theta-1$

よって　$\cos\theta(2\cos\theta+\sqrt{3})=0$

ゆえに　$\cos\theta=0$ または $\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，$\cos\theta=0$ から　$\theta=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi$

$\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ から　$\theta=\dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{7}{6}\pi$

したがって　$\theta=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi$

19　$\sqrt{3}\sin x-3\cos x=2\sqrt{3}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ であるから　$y=2\sqrt{3}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$　←三角関数の合成。

$0\leqq x\leqq\pi$ より $-\dfrac{\pi}{3}\leqq x-\dfrac{\pi}{3}\leqq\dfrac{2}{3}\pi$ であるから　$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leqq\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)\leqq1$

よって　$-3\leqq y\leqq2\sqrt{3}$

$\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=1$ のとき，$x-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$ から　$x=\dfrac{5}{6}\pi$

$\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき，$x-\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\pi}{3}$ から　$x=0$

したがって，この関数は $x=\dfrac{5}{6}\pi$ で最大値 $2\sqrt{3}$，$x=0$ で最小値 -3 をとる。

20　(1)　$\sqrt[7]{128}=\sqrt[7]{2^7}=2$

(2)　6乗すると729になる実数を x とすると　$x^6=729$

すなわち　$(x^2)^3-9^3=0$

よって　$(x^2-9)(x^4+9x^2+81)=0$

$x^4+9x^2+81>0$ であるから　$x^2-9=0$

ゆえに　$x=\pm3$

したがって，6乗すると729になる実数は　±3　←負の数も含まれることに注意。

21　(1)　$3^{-1.5}=3^{-\frac{3}{2}}=\dfrac{1}{3^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{1}{3\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{9}=\dfrac{1.73}{9}=0.192\cdots\cdots\fallingdotseq0.19$

$3^{-0.5}=3^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{3^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{1.73}{3}=0.576\cdots\cdots\fallingdotseq0.58$

$3^1=3$

$3^{1.5}=3^{\frac{3}{2}}=3\sqrt{3}=3\times1.73=5.19$

よって，x と y の対応表は次のようになる。

x	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5
y	0.19	0.33	0.58	1	1.73	3	5.19

(2)　$y=\log_4 x$ から　$x=4^y$

$4^{-1.5}=4^{-\frac{3}{2}}=\dfrac{1}{4^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{1}{(2^2)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{1}{2^3}=\dfrac{1}{8}=0.125\fallingdotseq0.13$

$4^{-0.5}=4^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{4^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{1}{(2^2)^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{1}{2}=0.5$

$4^0=1$

$4^{0.5}=4^{\frac{1}{2}}=(2^2)^{\frac{1}{2}}=2$

$4^1=4$

よって，x と y の対応表は次のようになる。

x	0.13	0.25	0.5	1	2	4	8
y	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5

22　(1)　方程式を変形すると　$2^{4x}=2^{9-6x}$　←$(2^4)^x=(2^3)^{3-2x}$

$4x=9-6x$ から　$x=\dfrac{9}{10}$

(2)　真数は正であるから　$x>0$ かつ $x-4>0$

すなわち　$x>4$　……①

方程式を変形すると　$\log_2 x(x-4)=5$

よって　$x(x-4)=2^5$

式を整理すると　$x^2-4x-32=0$　すなわち　$(x+4)(x-8)=0$

①より　$x=8$

(3)　真数は正であるから　$x>0$　……①

不等式を変形すると　$\log_{\frac{1}{3}} x\geqq\log_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{1}{3}\right)^2$

底 $\dfrac{1}{3}$ は1より小さいから　$x\leqq\left(\dfrac{1}{3}\right)^2$

すなわち　$x\leqq\dfrac{1}{9}$　……②

①，②の共通範囲を求めて　$0<x\leqq\dfrac{1}{9}$

(4)　真数は正であるから　$x-8>0$

すなわち　$x>8$　……①

不等式を変形すると　$\log_2(x-8)<\log_2 2^3$

底2は1より大きいから　$x-8<2^3$

すなわち　$x<16$　……②

①，②の共通範囲を求めて　$8<x<16$

23　(1)　$\log_{10}5^{30}=30\log_{10}5=30\log_{10}\dfrac{10}{2}=30(1-\log_{10}2)=30\times0.6990=20.97$

$20<\log_{10}5^{30}<21$ であるから　$10^{20}<5^{30}<10^{21}$

よって，5^{30} は21桁の数である。

(2)　$\log_{10}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{40}=40\log_{10}\dfrac{1}{3}=-40\log_{10}3=-19.084$

$-20<\log_{10}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{40}<-19$ であるから　$10^{-20}<\left(\dfrac{1}{3}\right)^{40}<10^{-19}$

よって，$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{40}$ を小数で表したとき，小数第20位に初めて0でない数字が現れる。

24 (1) $\lim_{h\to 2}(3h^3-4h^2+h+2)=12$

(2) $\dfrac{2\cdot 3^2-2\cdot(-1)^2}{3-(-1)}=\dfrac{18-2}{3+1}=\dfrac{16}{4}=4$

(3) $f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{\{(x+h)^2-5(x+h)\}-(x^2-5x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{(2x-5)h+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(2x-5+h)=2x-5$

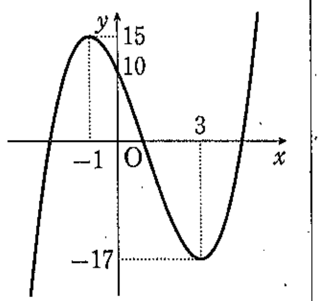
25 (1) $y'=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$y'=0$ とすると　$x=-1,\ 3$

y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	極大 15	$\searrow$	極小 -17	$\nearrow$

よって，グラフは右の図のようになる。



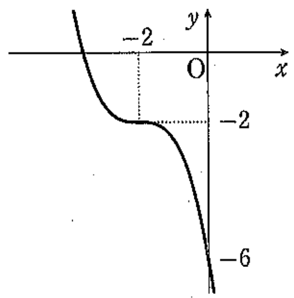
(2) $y'=-\dfrac{3}{2}x^2-6x-6=-\dfrac{3}{2}(x^2+4x+4)$

$=-\dfrac{3}{2}(x+2)^2$

y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$
y'	$-$	0	$-$
y	$\searrow$	-2	$\searrow$

よって，グラフは右の図のようになる。



26 (1) $y=x^3-12x-9$ から　$y'=3x^2-12$

よって，点 $(-1,\ 2)$ における接線の傾きは　$3\cdot(-1)^2-12=-9$

したがって，求める接線の方程式は

$y-2=-9\{x-(-1)\}$　すなわち　$y=-9x-7$

(2) $y=x^2+4x+5$ から　$y'=2x+4$

接点の座標を $(a,\ a^2+4a+5)$ とすると，接線の傾きは $2a+4$ となるから，

その方程式は　$y-(a^2+4a+5)=(2a+4)(x-a)$

すなわち　$y=(2a+4)x-a^2+5$　……①

この直線が点 $(2,\ -8)$ を通るから　$-8=(2a+4)\cdot 2-a^2+5$

よって　$a^2-4a-21=0$　これを解いて　$a=-3,\ 7$

①から，接線の方程式は　$a=-3$ のとき　$y=-2x-4$

$a=7$ のとき　$y=18x-44$

27 (1) $\displaystyle\int_{-2}^{1}(-2x^3+4x^2-x+3)dx=\left[-\frac{x^4}{2}+\frac{4}{3}x^3-\frac{x^2}{2}+3x\right]_{-2}^{1}$

$=\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{4}{3}-\dfrac{1}{2}+3\right)-\left(-8-\dfrac{32}{3}-2-6\right)=30$

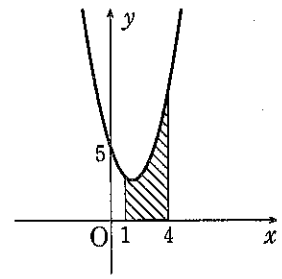
(2) $y=x^2-3x+5$ を変形すると

$y=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{11}{4}$

常に $y>0$ であるから，求める面積は

$\displaystyle\int_1^4(x^2-3x+5)dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+5x\right]_1^4$

$=\left(\dfrac{64}{3}-24+20\right)-\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{3}{2}+5\right)=\dfrac{27}{2}$



←グラフの概形をかいて，x 軸との位置関係を確認する。

28 (1) $3\vec{a}+5\vec{b}=3(-1,\ 4)+5(2,\ 6)=(-3,\ 12)+(10,\ 30)$

$=(-3+10,\ 12+30)=(7,\ 42)$

$|3\vec{a}+5\vec{b}|=\sqrt{7^2+42^2}=7\sqrt{1^2+6^2}=7\sqrt{37}$

$2\vec{a}-\vec{b}=2(-1,\ 4)-(2,\ 6)=(-2,\ 8)-(2,\ 6)$

$=(-2-2,\ 8-6)=(-4,\ 2)$

$|2\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{(-4)^2+2^2}=2\sqrt{5}$

(2) $3\vec{a}+5\vec{b}=3(6,\ -2,\ 5)+5(-1,\ 1,\ -2)=(18,\ -6,\ 15)+(-5,\ 5,\ -10)$

$=(18-5,\ -6+5,\ 15-10)=(13,\ -1,\ 5)$

$|3\vec{a}+5\vec{b}|=\sqrt{13^2+(-1)^2+5^2}=\sqrt{195}$

$2\vec{a}-\vec{b}=2(6,\ -2,\ 5)-(-1,\ 1,\ -2)=(12,\ -4,\ 10)-(-1,\ 1,\ -2)$

$=(12+1,\ -4-1,\ 10+2)=(13,\ -5,\ 12)$

$|2\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{13^2+(-5)^2+12^2}=\sqrt{338}=13\sqrt{2}$

29 (1) $\dfrac{2\vec{a}+5\vec{b}}{5+2}=\dfrac{2}{7}\vec{a}+\dfrac{5}{7}\vec{b}$　(2) $\dfrac{-3\vec{a}+4\vec{b}}{4-3}=-3\vec{a}+4\vec{b}$

(3) $\dfrac{-3\vec{a}+2\vec{b}}{2-3}=3\vec{a}-2\vec{b}$

30 (1) $\mathrm{P}(x,\ 0)$ とする。

←点 P は x 軸上にあるから，y 座標は 0

3点 A，B，P が一直線上にあるとき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ となる実数 k がある。

ここで　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x-3,\ -4)$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-5,\ -1)$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ から　$(x-3,\ -4)=k(-5,\ -1)$

よって　$x-3=-5k$ ……①，　$-4=-k$ ……②

②から　$k=4$

これを①に代入して　$x-3=-20$　ゆえに　$x=-17$

したがって，点 P の座標は　$(-17,\ 0)$

(2) $\mathrm{P}(0,\ y,\ z)$ とする。

←点 P は yz 平面上にあるから，x 座標は 0

3点 A，B，P が一直線上にあるとき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ となる実数 k がある。

ここで　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(-1,\ y-3,\ z-4)$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-3,\ -1,\ 1)$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ から　$(-1,\ y-3,\ z-4)=k(-3,\ -1,\ 1)$

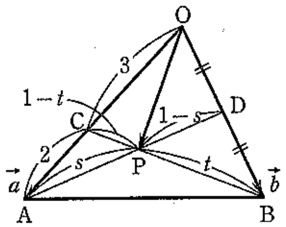
よって　$-1=-3k$ ……①，　$y-3=-k$ ……②，　$z-4=k$ ……③

①から　$k=\dfrac{1}{3}$　これを②，③に代入して　$y-3=-\dfrac{1}{3}$，$z-4=\dfrac{1}{3}$

ゆえに　$y=\dfrac{8}{3}$，$z=\dfrac{13}{3}$

したがって，点 P の座標は　$\left(0,\ \dfrac{8}{3},\ \dfrac{13}{3}\right)$

$\boxed{31}$　$\mathrm{AP:PD}=s:(1-s)$，$\mathrm{BP:PC}=t:(1-t)$ とすると



$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$
$$=(1-s)\vec{a}+\frac{1}{2}s\vec{b}\quad\cdots\cdots①$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\overrightarrow{\mathrm{OC}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$=\frac{3}{5}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}\quad\cdots\cdots②$$

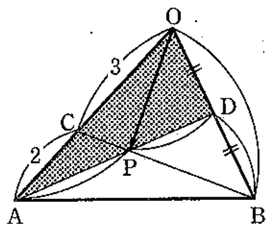
$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でないから，①，② より

$$1-s=\frac{3}{5}t,\ \frac{1}{2}s=1-t$$

よって　$5s+3t=5$，$s+2t=2$　　これを解いて　$s=\dfrac{4}{7}$，$t=\dfrac{5}{7}$

$s=\dfrac{4}{7}$ を ① に代入して　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{3}{7}\vec{a}+\dfrac{2}{7}\vec{b}$

$\boxed{別解}$　△OAD と直線 BC について，メネラウスの



定理から　$\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PD}}\cdot\dfrac{\mathrm{DB}}{\mathrm{BO}}\cdot\dfrac{\mathrm{OC}}{\mathrm{CA}}=1$

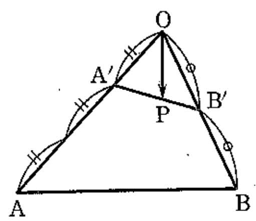
すなわち　$\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PD}}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{2}=1$

ゆえに　$\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PD}}=\dfrac{4}{3}$

よって，$\mathrm{AP:PD}=4:3$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+4\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{4+3}=\frac{1}{7}\left(3\vec{a}+4\times\frac{1}{2}\vec{b}\right)=\frac{3}{7}\vec{a}+\frac{2}{7}\vec{b}$$

$\boxed{32}$　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}=3s\left(\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)+2t\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$



ここで，$3s=s'$，$2t=t'$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s'\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)+t'\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right),$$
$$s'+t'=1,\ s'\geqq0,\ t'\geqq0$$

よって，$\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$，$\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$ となる点 A′，B′ をとると，点 P の存在範囲は線分 A′B′ である。

$\boxed{33}$　(1)　$a_n=4+(n-1)\cdot3=3n+1$

$$S_n=\frac{1}{2}n\{2\cdot4+(n-1)\cdot3\}=\frac{1}{2}n(3n+5)$$

(2)　$a_n=-2\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

$$S_n=\frac{-2\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{3}}=-3\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$

$\boxed{34}$　(1)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{30}k^2=\frac{1}{6}\cdot30(30+1)(2\cdot30+1)=9455$

←$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-5)=2\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}5=2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-5n$

$$=n\{(n+1)-5\}=n(n-4)$$

(3)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^2+3\cdot2^k)=\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}2^k$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+3\cdot\frac{2(2^n-1)}{2-1}$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+6(2^n-1)$$

←$r\neq1$ のとき $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}r^k=\frac{r(r^n-1)}{r-1}$

$\boxed{35}$　この数列の階差数列は　3，6，9，12，……

その一般項を b_n とすると $b_n=3n$ である。

よって，$n\geqq2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}3k=2+3\sum_{k=1}^{n-1}k=2+3\cdot\frac{1}{2}n(n-1)$$

すなわち　$a_n=\dfrac{1}{2}(3n^2-3n+4)$

初項は $a_1=2$ であるから，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，一般項は　$a_n=\dfrac{1}{2}(3n^2-3n+4)$

$\boxed{36}$　初項 a_1 は　$a_1=S_1=2\cdot1^2-3\cdot1=-1$　……①

$n\geqq2$ のとき　$a_n=S_n-S_{n-1}=(2n^2-3n)-\{2(n-1)^2-3(n-1)\}$

$$=(2n^2-3n)-(2n^2-7n+5)$$

すなわち　$a_n=4n-5$

① より $a_1=-1$ なので，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，一般項は　$a_n=4n-5$

←$n\geqq2$ のとき
$S_n=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{n-1}+a_n$
$=S_{n-1}+a_n$

$\boxed{37}$　(1)　数列 $\{a_n\}$ は初項 -2，公差 6 の等差数列であるから

$$a_n=-2+(n-1)\cdot6=6n-8$$

(2)　数列 $\{a_n\}$ は初項 3，公比 $\dfrac{4}{3}$ の等比数列であるから　$a_n=3\left(\dfrac{4}{3}\right)^{n-1}$

(3)　条件より　$a_{n+1}-a_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

数列 $\{a_n\}$ の階差数列の一般項が $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ であるから，$n\geqq2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k=1+\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{1}{2}}$$

よって　$a_n=2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

初項は $a_1=1$ なので，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，一般項は　$a_n=2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

1．

思考のカギ

整式の割り算における商と余りの定義をしっかりと確認しよう。関係式
$A=BQ+R$ に加えて，それに付随する条件を押さえておくことが重要である。

解答

【誤っている点】
余りの次数が，割る整式の次数と同じになっていること。

【正しい商と余り】
右の計算により，商は x^2-x+2，余りは 3

$$
\begin{array}{r}
x^2\ -x\ +2 \\
x-1\,\big)\overline{\,x^3-2x^2+3x+1} \\
\underline{x^3-\ x^2\qquad\qquad} \\
-\ x^2+3x+1 \\
\underline{-\ x^2+\ x\qquad} \\
2x+1 \\
\underline{2x-2} \\
3
\end{array}
$$

← $A=BQ+R$ のとき，R は 0 または B より次数の低い整式。

2．

思考のカギ

(1)　基本的な 2 次方程式 $x^2=k$ は，両辺の平方根をとることで解くことができる。これを一般の 2 次方程式に利用するために，左辺をどのように変形すべきかを考えよう。

(2), (3)　虚数単位 i を含む等式を扱うときは，各辺を実部と虚部に分け，考察の対象を実数に落としこむことが基本となる。

解答

(1)　$ax^2+bx+c=0$ の左辺を平方完成すると　$a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2}{4a}+c=0$

よって　$a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=\dfrac{b^2-4ac}{4a}=\dfrac{D}{4a}$

両辺を a で割ると　$\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=\dfrac{D}{4a^2}$

ゆえに　$x+\dfrac{b}{2a}=\pm\dfrac{\sqrt{D}}{2a}$　したがって　$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$

(2)　(i)　(1) において，$a=1$，$b=4+3i$，$c=1+6i$ とすると

$D=(4+3i)^2-4(1+6i)=16+24i-9-4-24i=3$

よって　$x=\dfrac{-^{ア}4\pm\sqrt{^{イ}3}-^{ウ}3i}{^{エ}2}$

(ii)　実数解 α をもつと仮定すると　$\alpha^2+(4+3i)\alpha+(1+6i)=0$

整理すると　$(\alpha^2+4\alpha+1)+(3\alpha+6)i=0$

← 実部と虚部に分ける。

$\alpha^2+4\alpha+1$，$3\alpha+6$ は実数であるから　$\alpha^2+4\alpha+1=0$，$3\alpha+6=0$

これらを満たす実数 α は存在しないから，矛盾である。

よって，2 次方程式 $x^2+(4+3i)x+(1+6i)=0$ は実数解をもたない。

(3)　実数解 β をもつとすると　$(1+i)\beta^2-k\beta+(1-i)=0$

整理すると　$(\beta^2-k\beta+1)+(\beta^2-1)i=0$

← 実部と虚部に分ける。

$\beta^2-k\beta+1$，β^2-1 は実数であるから　$\beta^2-k\beta+1=0$，$\beta^2-1=0$

$\beta^2-1=0$ から　$\beta=\pm1$

$k=\dfrac{\beta^2+1}{\beta}$ であるから，$\beta=1$ のとき　$k=2$

$\beta=-1$ のとき　$k=-2$

よって　$k=\pm2$

3．

思考のカギ

(2), (3)　x と y の不等式は xy 平面上で領域として表せるから，図をかいてみると不等号の関係が考えやすい。

解答

(1)　【方法 1】① を ② に代入して整理すると　$^{ア}3x+{}^{イ}4y={}^{ウ}25$

よって　$y=\dfrac{25-3x}{4}$　……③

これを ① に代入すると　$x^2+\dfrac{(25-3x)^2}{16}=25$

整理すると　$x^2-{}^{エ}6x+{}^{オ}9=0$　……④

④ を解くと　$x=3$　このとき，③ から　$y=4$

← $x=3$ を ① や ② に代入しないように注意。

よって，共有点は点 (3, 4) の $^{カ}1$ 個である。

【方法 2】円 C は原点を中心とする半径が 5 の円であるから

C(0, 0)，$r_1={}^{キ}5$

② から　$(x+3)^2+(y+4)^2=100$

よって，円 D は点 $(-3,\ -4)$ を中心とする半径が 10 の円であるから

D$(-3,\ -4)$，$r_2={}^{ク}10$

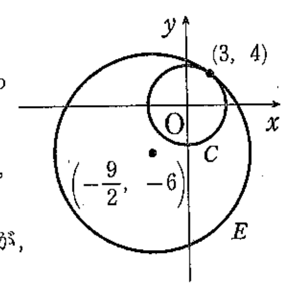
2 点 C，D 間の距離 d は　$d=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}=5$

したがって，$d=|r_1-r_2|$ が成り立つから，共有点は 1 個である。(^{ケ}④)

(2)　$x^2+y^2+9x+12y=100$ ……⑤ を変形すると　$\left(x+\dfrac{9}{2}\right)^2+(y+6)^2=\dfrac{625}{4}$

これは中心が点 E$\left(-\dfrac{9}{2},\ -6\right)$，半径が $r_3=\dfrac{25}{2}$ の円を表す。

この円を E とすると，



$\mathrm{CE}=\sqrt{\left(-\dfrac{9}{2}\right)^2+(-6)^2}=\dfrac{15}{2}$，$|r_1-r_3|=\dfrac{15}{2}$ であるから，円 C は円 E に内接する。

(1) の【方法 1】と同様にして，① と ⑤ より $x=3$，$y=4$ であるから，共有点は　点 (3, 4)

よって，$x=3$，$y=4$ のとき，$x^2+y^2\leqq25$ であるが，

$x^2+y^2+9x+12y<100$　ではない。

したがって，この命題は偽。(反例：$x=3$，$y=4$)

← 反例は 1 つしかないが，それだけで命題は偽となる。

(3)　命題が真になるのは，x^2+y^2 $^{コ}\boxed{}$ 25 を表す領域や図形が

$x^2+y^2+9x+12y$ $^{サ}\boxed{}$ 100 を表す領域や図形に含まれるときである。

よって　⓪，①，②，③

4.

思考のカギ

三角関数のグラフについて，式の形を見て，基本となるグラフをどのように平行移動，または拡大縮小したものであるかを判断できるようにしよう。また，m を整数とするとき，角度が $\frac{m}{12}\pi$ である三角関数の値は既知でないものが多いが，適当な和の形に直すことで計算できる。

解答

⓪～⑤のうち，周期が π であるものは　⓪，①，④，⑤

$\theta=\frac{\pi}{3}$ のとき　$\sin 2\theta=\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(2\theta-\frac{5}{12}\pi\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}$$

$$\tan\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=\tan 0=0$$

$$\frac{1}{2}\tan\left(\theta-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1}{2}\tan\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}$$

よって，周期が π であり，$\theta=\frac{\pi}{3}$ のとき $y=\frac{1}{2}$ となるような関数は

①，⑤

① のグラフは(a)～(d)のいずれかであり，⑤ のグラフは(e)，(f)のいずれかである。① は $\theta=0$ のとき $y<0$ であるから，グラフは　(b)

←(a)～(d)は正弦曲線で sin か cos の関数を表し，(e)，(f)は tan の関数を表す。

(e)は $y=\tan\theta$ のグラフを θ 軸方向に平行移動したもので ⑤ のグラフではないから，⑤ のグラフは　(f)

また，$\theta=\pi$ のとき　

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(2\theta-\frac{5}{12}\pi\right)&=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{19}{12}\pi\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{5}{4}\pi+\frac{\pi}{3}\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin\frac{5}{4}\pi\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{5}{4}\pi\sin\frac{\pi}{3}\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}=-\frac{\sqrt{3}+1}{4}\end{aligned}$$

←$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{4}{3}\pi+\frac{\pi}{4}\right)$ としてもよい。

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\tan\left(\theta-\frac{\pi}{12}\right)&=\frac{1}{2}\tan\frac{11}{12}\pi=\frac{1}{2}\tan\left(\frac{3}{4}\pi+\frac{\pi}{6}\right)\\&=\frac{1}{2}\times\frac{\tan\frac{3}{4}\pi+\tan\frac{\pi}{6}}{1-\tan\frac{3}{4}\pi\tan\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{2}\times\frac{-1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-(-1)\times\frac{1}{\sqrt{3}}}\\&=-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=-\frac{2-\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

←$\frac{1}{2}\tan\left(\frac{2}{3}\pi+\frac{\pi}{4}\right)$ としてもよい。

5.

思考のカギ

(1)「a^b が何桁の数か」を考えるとき，どのような不等式を立てるだろうか。与えられた条件から，その形の式が導ければよい。

(2)「A は B の何倍か」を考えるには，$\frac{A}{B}$ を求める。対数の性質を使って，この形を導こう。

解答

(1)　$M=7.3$ のとき　$\log_{10}E=4.8+1.5\times7.3=15.75$

$15<\log_{10}E<16$ であるから　$10^{15}<E<10^{16}$

よって，E は 16 桁の数である。

←10^{16} は 1 の後に 0 が 16 個続くから，17 桁の数である。

(2)　マグニチュードが $M+1$ のときのエネルギーを E' とすると

$$\log_{10}E'=4.8+1.5(M+1)$$

よって　$\log_{10}E'-\log_{10}E=1.5$

すなわち　$\log_{10}\frac{E'}{E}=1.5$

$$\frac{E'}{E}=10^{1.5}$$

したがって，マグニチュードが 1 増加すると，エネルギーは

$10^{1.5}=10^{\frac{3}{2}}=10\sqrt{10}=\sqrt{1000}$ 倍になる。

$31^2=961$ であるから，最も近いものは　③

(3)　各辺の常用対数をとると

$$\log_{10}(1.0\times10^{10})<\log_{10}E<\log_{10}(2.0\times10^{10})$$

よって　$10<\log_{10}E<10+\log_{10}2$

$$10<\log_{10}E<10.3010$$

したがって　$10<4.8+1.5M<10.3010$

$$3.46\cdots\cdots<M<3.66\cdots\cdots$$

小数第 2 位を四捨五入すると　${}^{ア}3.5<M<{}^{イ}3.7$

6.

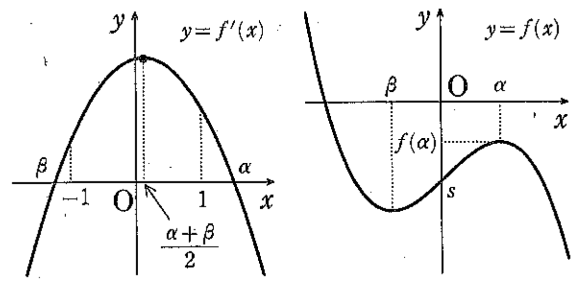
思考のカギ

与えられた条件から，$y=f(x)$ と $y=f'(x)$ のグラフの概形がどのようになるかがわかる。まずは 2 つのグラフの概形をかいてみるとよい。

解答

導関数は　$f'(x)=3px^2+2qx+r$

条件(a)，(b)から，関数 $y=f'(x)$，$y=f(x)$ のグラフの概形は，それぞれ次の図のようになる。



←条件(a)のみだと，$x=\alpha$ と $x=\beta$ のどちらで極大，極小となるかがわからず，極値が第何象限にあるかもわからない。

$y=f'(x)$ について，グラフが上に凸の放物線であるから　$p<0$

また，$x=0$ のとき y の値は正であるから　$r>0$

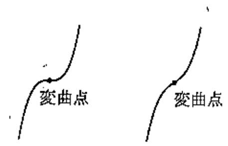
$y=f(x)$ について，$x=0$ のとき y の値は負であるから　$s<0$

また，極値をとる x の値 α，β は 2 次方程式 $3px^2+2qx+r=0$ の解であるから，解と係数の関係により　$\alpha+\beta=-\frac{2q}{3p}$

$\frac{\alpha+\beta}{2}>0$ であるから　　$-\frac{2q}{3p}>0$

$p<0$ であるから　　$q>0$

参考　3次関数 $f(x)$ が $x=\alpha$ で極大値 $f(\alpha)$，$x=\beta$ で極小値 $f(\beta)$ をとるとき，そのグラフは2点 $(\alpha,\ f(\alpha))$，$(\beta,\ f(\beta))$ の中点 $\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}\right)$ (変曲点という) に関して対称である。極値が存在しないときも，3次関数には変曲点が必ず存在し，その点に関してグラフは対称になる。



7.

思考のカギ

部屋全体を座標空間内に置いて考えるとよい。その際，点Pが南側の壁にあるという条件をうまく利用するために，基準点をどこにとればよいかを考えよう。

解答

以下の計算では，単位は m とする。

部屋の南西角，高さが0の地点を原点 O(0, 0, 0) とし，部屋の床，西側の壁，南側の壁がそれぞれ xy 平面，yz 平面，zx 平面に含まれるとして座標空間を考えると，フック A，B がある地点の座標はそれぞれ

$$A\left(0,\ \frac{3}{2},\ 2\right),\ B\left(5,\ 1,\ \frac{12}{5}\right)$$

zx 平面に関して点Bと対称な点を B′ とすると　　$B'\left(5,\ -1,\ \frac{12}{5}\right)$

ロープの長さ AP+BP が最小となるとき，AP+B′P も最小となる。

AP+B′P が最小となるのは，3点 A，P，B′ が一直線上にあるときである。

$\overrightarrow{AB'}=\left(5,\ -\frac{5}{2},\ \frac{2}{5}\right)$ であるから，$\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AB'}$ (k は実数) とおくと

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{AB'}=\left(5k,\ \frac{3}{2}-\frac{5}{2}k,\ 2+\frac{2}{5}k\right)$$

←基準点Oをどこにとるかによって3点 A，B，B′ の座標は変わるが，ベクトルは位置に関係しないから，$\overrightarrow{AB'}$ はつねに $\left(5,\ -\frac{5}{2},\ \frac{2}{5}\right)$ となる。

点Pは zx 平面上にあるから　　$\frac{3}{2}-\frac{5}{2}k=0$

よって　　$k=\frac{3}{5}$　　　　したがって　　$P\left(3,\ 0,\ \frac{56}{25}\right)$

$2.5-\frac{56}{25}=\frac{5}{2}-\frac{56}{25}=\frac{13}{50}=0.26$ であるから，点Pの位置は

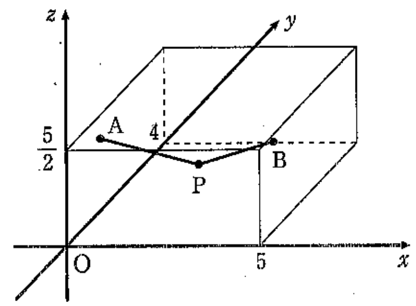
　　西から 3 m，天井から 26 cm のところ

参考　$A\left(0,\ \frac{3}{2},\ 2\right)$，$B'\left(5,\ -1,\ \frac{12}{5}\right)$ で，点Pの y 座標が0であることから

$$AP:B'P=\frac{3}{2}:1=3:2$$

よって，点Pの座標は　　$\left(\frac{2\times0+3\times5}{3+2},\ 0,\ \frac{2\times2+3\times\frac{12}{5}}{3+2}\right)$

すなわち　　$\left(3,\ 0,\ \frac{56}{25}\right)$　　としてもよい。



8.

思考のカギ

(2)　n が大きくなると，a_n を直接考えることも難しくなる。(1) の手順を参考にして，円盤が n 枚の場合を使って $n+1$ 枚の場合を表してみよう。

解答

(1)　3本の杭を左から順に A，B，C とし，n 枚の円盤を上から順に D_1，D_2，D_3，……，D_n とする。

$n=2$ のとき，最小の手順は次のようになる。

(2−1)　A の D_1 を B に移動

(2−2)　A の D_2 を C に移動

(2−3)　B の D_1 を C に移動

よって　　$a_2=3$

$n=3$ のとき，最小の手順は次のようになる。

(3−1)　A の D_1 を C に移動

(3−2)　A の D_2 を B に移動

(3−3)　C の D_1 を B に移動

←(3−1)～(3−3) は，(2−1)～(2−3) において B と C を入れ替えたものになっている。

(3−4)　A の D_3 を C に移動

(3−5)　B の D_1 を A に移動

(3−6)　B の D_2 を C に移動

(3−7)　A の D_1 を C に移動

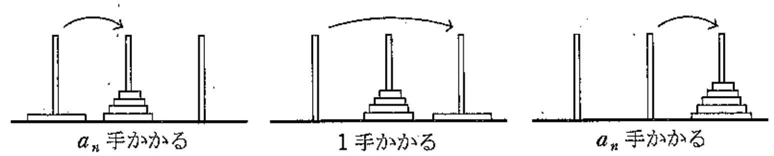
←(3−5)～(3−7) は，(2−1)～(2−3) において A と B を入れ替えたものになっている。

よって　　$a_3=7$

(2)　対称性より，n 枚の円盤を杭 A から杭 B に，また，杭 B から杭 C に移動させる最小の手数も a_n である。

よって，$n+1$ 枚の円盤を最小の手数で移動させるには次のようにする。

- A の D_1 ～ D_n を B に移動
- A の D_{n+1} を C に移動
- B の D_1 ～ D_n を C に移動



したがって　　$a_{n+1}=a_n+1+a_n=2a_n+1$

また　　$a_1=1$

漸化式を変形すると　　$a_{n+1}+1=2(a_n+1)$

よって，数列 $\{a_n+1\}$ は初項 $a_1+1=2$，公比2の等比数列であるから

$$a_n+1=2^n$$

したがって　　$a_n=2^n-1$