(　　)番　名前(　　模範解答　　)

$\boxed{1}$

次の楕円の概形をかけ。また，その焦点の座標，長軸の長さ，短軸の長さを求めよ。

(1)　$\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{2^2}=1$　　　　(2)　$2x^2+y^2=4$

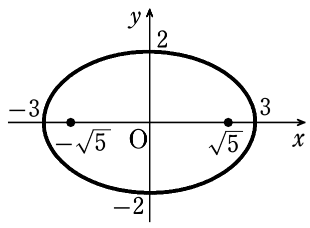
解説

(1)　楕円 $\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{2^2}=1$ の概形は，右の図のようになる。

焦点は　　2点 $(\sqrt{5},\ 0)$，$(-\sqrt{5},\ 0)$

長軸の長さは　　$2\cdot3=6$

短軸の長さは　　$2\cdot2=4$

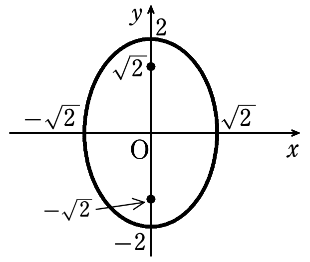


(2)　楕円 $2x^2+y^2=4$ すなわち $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{4}=1$ の概形は，右の図のようになる。

焦点は　　2点 $(0,\ \sqrt{2})$，$(0,\ -\sqrt{2})$

長軸の長さは　　$2\cdot2=4$

短軸の長さは　　$2\cdot\sqrt{2}=2\sqrt{2}$



$\boxed{2}$

次の楕円の方程式を求めよ。

(1)　2点 $(0,\ 3)$，$(0,\ -3)$ を焦点とし，焦点からの距離の和が 8 である楕円

(2)　円 $x^2+y^2=5^2$ を，y 軸をもとにして x 軸方向に $\dfrac{3}{5}$ 倍して得られる楕円

解説

(1)　求める方程式は $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(b>a>0)$ とおける。

焦点からの距離の和について，$2b=8$ であるから　　$b=4$

焦点の座標について，$\sqrt{b^2-a^2}=3$ であるから

$a^2=b^2-3^2=16-9=7$

したがって，求める楕円の方程式は　　$\dfrac{x^2}{7}+\dfrac{y^2}{16}=1$

(2)　円上に点 $\mathrm{Q}(s,\ t)$ をとり，Q が移る点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると

$s^2+t^2=5^2$　……①，$x=\dfrac{3}{5}s$，$y=t$　……②

② より　　$s=\dfrac{5}{3}x$，$t=y$　……③

③ を ① に代入すると　　$\left(\dfrac{5}{3}x\right)^2+y^2=5^2$　　すなわち　$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{25}=1$

$\boxed{3}$

短軸の両端が $(\sqrt{3},\ 0)$，$(-\sqrt{3},\ 0)$ で，点 $(-1,\ 2)$ を通る楕円の方程式を求めよ。

解説

短軸の両端が $(\sqrt{3},\ 0)$，$(-\sqrt{3},\ 0)$ であることから，楕円の方程式は

$\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(b>\sqrt{3})$ とおける。

これに $x=-1$，$y=2$ を代入すると　　$\dfrac{1}{3}+\dfrac{4}{b^2}=1$

よって　　$b^2=6$　　　これは，$b>\sqrt{3}$ を満たす。

したがって，求める楕円の方程式は　　$\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{6}=1$

$\boxed{4}$

長さが 8 の線分 AB の端点 A は x 軸上を，端点 B は y 軸上を動くとする。

(1)　線分 AB を 5 : 3 に内分する点 P の軌跡を求めよ。

(2)　線分 AB を 5 : 3 に外分する点 Q の軌跡を求めよ。

解説

2点 A，B の座標を，それぞれ $(s,\ 0)$，$(0,\ t)$ とすると，$\mathrm{AB}=8$ であるから

$s^2+t^2=8^2$　……①

(1)　点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると，P は線分 AB を 5 : 3 に内分するから

$x=\dfrac{3s+5\cdot0}{5+3}=\dfrac{3}{8}s$，$y=\dfrac{3\cdot0+5t}{5+3}=\dfrac{5}{8}t$

よって　　$s=\dfrac{8}{3}x$，$t=\dfrac{8}{5}y$

これを ① に代入すると　　$\left(\dfrac{8}{3}x\right)^2+\left(\dfrac{8}{5}y\right)^2=8^2$

整理すると　　$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{25}=1$　……②

ゆえに，条件を満たす点 P は，楕円 ② 上にある。

逆に，楕円 ② 上の任意の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は，条件を満たす。

したがって，求める軌跡は　　楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{25}=1$

(2)　点 Q の座標を $(x,\ y)$ とすると，Q は線分 AB を 5 : 3 に外分するから

$x=\dfrac{-3s+5\cdot0}{5-3}=-\dfrac{3}{2}s$，$y=\dfrac{-3\cdot0+5t}{5-3}=\dfrac{5}{2}t$

よって　　$s=-\dfrac{2}{3}x$，$t=\dfrac{2}{5}y$

これを ① に代入すると　　$\left(-\dfrac{2}{3}x\right)^2+\left(\dfrac{2}{5}y\right)^2=8^2$

整理すると　　$\dfrac{x^2}{144}+\dfrac{y^2}{400}=1$　……②

ゆえに，条件を満たす点 Q は，楕円 ② 上にある。

逆に，楕円 ② 上の任意の点 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ は，条件を満たす。

したがって，求める軌跡は　　楕円 $\dfrac{x^2}{144}+\dfrac{y^2}{400}=1$

$\boxed{5}$

楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 上の点 P と点 $(2,\ 0)$ の距離 l の最小値，および最大値を求めよ。

解説

点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると　　$l^2=(x-2)^2+y^2$　……①

P は楕円上にあるから　　$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$

よって　　$y^2=4\left(1-\dfrac{x^2}{9}\right)$　……②

$y^2\geqq0$ であるから　　$4\left(1-\dfrac{x^2}{9}\right)\geqq0$

これを解くと　　$-3\leqq x\leqq3$　……③

② を ① に代入して

$l^2=(x-2)^2+4\left(1-\dfrac{x^2}{9}\right)$

$=\dfrac{5}{9}x^2-4x+8=\dfrac{5}{9}\left(x-\dfrac{18}{5}\right)^2+\dfrac{4}{5}$

$l>0$ であるから，l は l^2 が最小のとき最小，l^2 が最大のとき最大である。

③ より，l^2 は $x=3$ で最小値 1，$x=-3$ で最大値 25 をとる。

よって，距離 l の最小値は　　$\sqrt{1}=1$，

最大値は　　$\sqrt{25}=5$