１．次の２次関数のグラフの軸の方程式と，頂点の座標を求めよ。

(1) $y=x^2-2x-1$

$=(x-1)^2-1-1$

$=(x-1)^2-2$

軸：$x=1$，頂点（1，-2）

(2) $y=x^2+10x+16$

$=(x+5)^2-25+16$

$=(x+5)^2-9$

軸：$x=-5$，頂点（-5，-9）

(3) $y=x^2+5x+1$

$=(x+\frac{5}{2})^2-\frac{25}{4}+1$

$=(x+\frac{5}{2})^2-\frac{21}{4}$

軸：$x=-\frac{5}{2}$，頂点（$-\frac{5}{2}$，$-\frac{21}{4}$）

(4) $y=x^2-x$

$=(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}$

軸：$x=\frac{1}{2}$，頂点（$\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{4}$）

(5) $y=2x^2+8x+3$

$=2(x^2+4x)+3$

$=2(x+2)^2-8+3$

$=2(x+2)^2-5$

軸：$x=-2$，頂点（-2，-5）

(6) $y=3x^2-6x$

$=3(x^2-2x)$

$=3(x-1)^2-3$

軸：$x=1$，頂点（1，-3）

(7) $y=2x^2-2x+1$

$=2(x^2-x)+1$

$=2(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{2}+1$

$=2(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}$

軸：$x=\frac{1}{2}$，頂点（$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$）

(8) $y=3x^2-x+2$

$=3(x^2-\frac{1}{3}x)+2$

$=3(x-\frac{1}{6})^2+\frac{23}{12}$

軸：$x=\frac{1}{6}$，頂点（$\frac{1}{6}$，$\frac{23}{12}$）

(9) $y=-x^2-4x-1$

$=-(x^2+4x)-1$

$=-(x+2)^2+4-1$

$=-(x+2)^2+3$

軸：$x=-2$，頂点（-2，3）

(10) $y=-2x^2+4x+1$

$=-2(x^2-2x)+1$

$=-2(x-1)^2+3$

軸：$x=1$，頂点（1，3）

(11) $y=-\frac{1}{2}x^2-x-1$

$=-\frac{1}{2}(x^2+2x)-1$

$=-\frac{1}{2}(x+1)^2-\frac{1}{2}$

軸：$x=-1$，頂点（-1，$-\frac{1}{2}$）

(12) $y=2x^2-5x$

$=2(x^2-\frac{5}{2}x)$

$=2(x-\frac{5}{4})^2-\frac{25}{8}$

軸：$x=\frac{5}{4}$，頂点（$\frac{5}{4}$，$-\frac{25}{8}$）

(13) $y=-2x^2+x+3$

$=-2(x^2-\frac{1}{2}x)+3$

$=-2(x-\frac{1}{4})^2+\frac{25}{8}$

軸：$x=\frac{1}{4}$，頂点（$\frac{1}{4}$，$\frac{25}{8}$）

(14) $y=-x^2-x+2$

$=-(x^2+x)+2$

$=-(x+\frac{1}{2})^2+\frac{9}{4}$

軸：$x=-\frac{1}{2}$，頂点（$-\frac{1}{2}$，$\frac{9}{4}$）

(15) $y=\frac{1}{3}x^2-4x+1$

$=\frac{1}{3}(x^2-12x)+1$

$=\frac{1}{3}(x-6)^2-11$

軸：$x=6$，頂点（6，-11）

(16) $y=-4x^2-6x-3$

$=-4(x^2+\frac{3}{2}x)-3$

$=-4(x+\frac{3}{4})^2-\frac{3}{4}$

軸：$x=-\frac{3}{4}$，頂点（$-\frac{3}{4}$，$-\frac{3}{4}$）

２．次の問いに答えよ。

(1) 放物線 $y=x^2+6x+2$ を x 軸方向に 4，y 軸方向に 5 だけ平行移動して得られる放物線の方程式を求めよ。

$y=(x+3)^2-7$

頂点，$(-3,-7)$

↓ x軸方向に4　y軸方向に5

頂点，$(1,-2)$

よって，

$y=(x-1)^2-2$

$=x^2-2x-1$

(2) 放物線 $y=-2x^2+4x-3$ を x 軸方向に -3，y 軸方向に 2 だけ平行移動して得られる放物線の方程式を求めよ。

x を $x+3$，y を $y-2$ に置きかえて，

$y-2=-2(x+3)^2+4(x+3)-3$

$=-2x^2-8x-9$

$\leftrightarrow$ $y=-2x^2-8x-9$

(3) 放物線 $y=-x^2+4x+1$ のグラフをどのように平行移動すれば，放物線 $y=-x^2-2x$ のグラフが得られるか。

$y=-(x-2)^2+5$

頂点，$(2,5)$

$y=-(x+1)^2+1$

頂点，$(-1,1)$

x軸方向に-3，y軸方向に-4 だけ平行移動

x 軸方向に -3，y 軸方向に -4

(4) 放物線 $y=x^2-x+1$ のグラフをどのように平行移動すれば，放物線 $y=x^2+3x-2$ のグラフが得られるか。

$y=(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$

頂点，$(\frac{1}{2},\frac{3}{4})$

$y=(x+\frac{3}{2})^2-\frac{17}{4}$

頂点，$(-\frac{3}{2},-\frac{17}{4})$

x軸方向に-2，y軸方向に-5 だけ平行移動

x 軸方向に -2，y 軸方向に -5

３．x 軸方向に 2，y 軸方向に -1 だけ平行移動すると放物線 $y=-2x^2+4x+3$ に重なるような放物線の方程式を求めよ。

↑ x軸方向に-2　y軸方向に1

$y=-2(x^2-2x)+3$

$=-2(x-1)^2+5$

頂点，$(1,5)$

よって，

頂点は $(-1,6)$ なので，

$y=-2(x+1)^2+6$

$=-2x^2-4x+4$

4．次の問いに答えよ。

(1) 放物線 $y=x^2-10x-5$ を，次のものに関して対称移動した放物線の方程式を求めよ。

① x 軸

頂点 $(5,30)$ より，

$y=-(x-5)^2+30$

$\Leftrightarrow y=-x^2+10x+5$

② y 軸

頂点 $(-5,-30)$ より，

$y=(x+5)^2-30$

$=x^2+10x-5$

③ 原点

頂点 $(-5,30)$ より，

$y=-(x+5)^2+30$

$=-x^2-10x+5$

$y=(x-5)^2-30$

頂点 $(5,-30)$

(2) 放物線 $y=-3x^2-12x+2$ を，次のものに関して対称移動した放物線の方程式を求めよ。

① x 軸

→ y を $-y$ に置きかえる

$-y=-3x^2-12x+2$

$\Leftrightarrow y=3x^2+12x-2$

② y 軸

→ x を $-x$ に置きかえる

$y=-3(-x)^2-12\cdot(-x)+2$

$=-3x^2+12x+2$

③ 原点

→ x を $-x$，y を $-y$ に置きかえる。

$-y=-3(-x)^2-12\cdot(-x)+2$

$\Leftrightarrow y=3x^2-12x-2$

(3) 放物線 $y=\frac{1}{2}x^2-x+2$ を，次のものに関して対称移動した放物線の方程式を求めよ。

① x 軸

頂点 $(1,-\frac{3}{2})$ より，

$y=-\frac{1}{2}(x-1)^2-\frac{3}{2}$

$=-\frac{1}{2}x^2+x-2$

② y 軸

頂点 $(-1,\frac{3}{2})$ より，

$y=\frac{1}{2}(x+1)^2+\frac{3}{2}$

$=\frac{1}{2}x^2+x+2$

③ 原点

頂点 $(-1,-\frac{3}{2})$ より，

$y=-\frac{1}{2}(x+1)^2-\frac{3}{2}$

$=-\frac{1}{2}x^2-x-2$

$y=\frac{1}{2}(x^2-2x)+2$

$=\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{3}{2}$

頂点 $(1,\frac{3}{2})$

5．放物線 $y=-x^2+2x-2$ …① を原点に関して対称に移動し，さらに x 軸に関して対称に移動して得られる放物線 ② の方程式は $y=$ $\boxed{ア}$ であり，② は ① を $\boxed{イ}$ に関して対称に移動した放物線である。

$y=-(x-1)^2-1$

頂点 $(1,-1)$

↓ 原点対称

↓ x 軸対称

頂点 $(-1,-1)$

y 軸対称

よって，

$y=-(x+1)^2-1$

$=-x^2-2x-2$

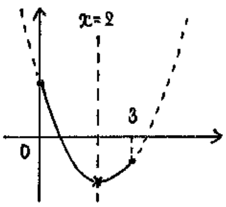
ア：$y=-x^2-2x-2$，イ：y 軸

6．次の２次関数の最大値，最小値を求めなさい。

(1) $y=x^2-4x+2$ $(0\leqq x\leqq 3)$

$=(x-2)^2-2$

軸：$x=2$，頂点 $(2,-2)$



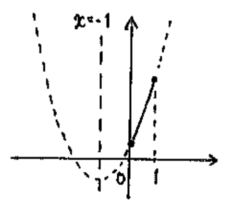
最大値：2，最小値：-2

（$x=0$）（$x=2$）

(2) $y=2x^2+4x+3$ $(0\leqq x\leqq 1)$

$=2(x+1)^2+1$

軸：$x=-1$，頂点 $(-1,1)$



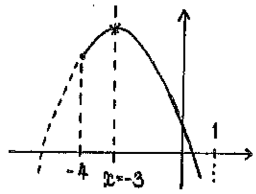
最大値：9，最小値：3

（$x=1$）（$x=0$）

(3) $y=-x^2-6x+1$ $(-4\leqq x\leqq 1)$

$=-(x+3)^2+10$

軸：$x=-3$，頂点 $(-3,10)$



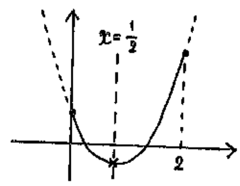
最大値：10，最小値：-6

（$x=-3$）（$x=1$）

(4) $y=x^2-x+1$ $(0\leqq x\leqq 2)$

$=(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$

軸：$x=\frac{1}{2}$，頂点 $(\frac{1}{2},\frac{3}{4})$



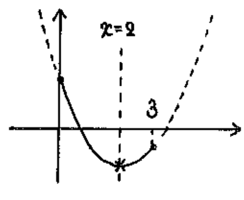
最大値：3，最小値：$\frac{3}{4}$

（$x=2$）（$x=\frac{1}{2}$）

(5) $y=\frac{1}{2}x^2-2x+1$ $(0\leqq x\leqq 3)$

$=\frac{1}{2}(x-2)^2-1$

軸：$x=2$，頂点 $(2,-1)$



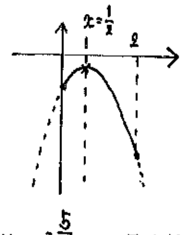
最大値：1，最小値：-1

（$x=0$）（$x=2$）

(6) $y=-3x^2+3x-2$ $(0\leqq x\leqq 2)$

$=-3(x-\frac{1}{2})^2-\frac{5}{4}$

軸：$x=\frac{1}{2}$，頂点 $(\frac{1}{2},-\frac{5}{4})$



最大値：$-\frac{5}{4}$，最小値：-8

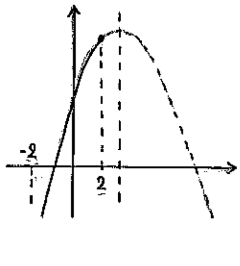
（$x=\frac{1}{2}$）（$x=2$）

7．関数 $y=-2x^2+12x+c$ $(-2\leqq x\leqq 2)$ の最大値が 7 となるように，定数 c の値を定めよ。また，そのときの最小値を求めよ。

$y=-2(x^2-6x)+c$

$=-2(x-3)^2+18+c$

軸：$x=3$，頂点 $(3,18+c)$



$x=2$ のとき最大をとるので，

$-8+24+c=7$

$\Leftrightarrow c=-9$

よって，

最小値 -41 $(x=-2)$

8．次の２次関数のグラフの軸の方程式と，頂点の座標を求めよ。ただし，aは実数の定数とする。

(1)　$y=x^2-2(a-1)x+a^2+1$

$\times\frac{1}{2}$

$= \{x-(a-1)\}^2-(a-1)^2+a^2+1$

2乗して引く

$= \{x-(a-1)\}^2+2a$

軸：$x=a-1$，頂点$(a-1,\ 2a)$

(2)　$y=-2x^2+2(a+1)x-a+1$

$= -2\{x^2-(a+1)x\}-a+1$

$= -2\left\{x-\frac{a+1}{2}\right\}^2+\frac{(a+1)^2}{2}-a+1$

$= -2\left(x-\frac{a+1}{2}\right)^2+\frac{a^2+3}{2}$

軸：$x=\frac{a+1}{2}$，頂点$\left(\frac{a+1}{2},\ \frac{a^2+3}{2}\right)$

9．次の問いに答えよ。

(1)　放物線$y=ax^2+bx+c$をx軸方向に-3，y軸方向に1だけ平行移動した後，原点に関して対称移動したものが，$y=x^2-6x-4$になった。定数a，b，cの値を求めよ。

$y=x^2-6x-4$

$=(x-3)^2-13$

頂点$(3,\ -13)$

↓ 原点対称

頂点$(-3,\ 13)$

↓ x軸方向に3
　y　〃　に-1

頂点$(0,\ 12)$

よって，

$y=-(x-0)^2+12$

$=-x^2+12$

$a=-1$，$b=0$，$c=12$

(2)　放物線$y=ax^2+bx+c$をy軸に関して対称移動した後，x軸方向に4，y軸方向に-3だけ平行移動したものが，$y=-x^2+3x-4$になった。定数a，b，cの値を求めよ。

$y=-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{7}{4}$

頂点$\left(\frac{3}{2},\ -\frac{7}{4}\right)$

↓ x軸方向に-4
　y　〃　に3

頂点$\left(-\frac{5}{2},\ \frac{5}{4}\right)$

↓ y軸対称

頂点$\left(\frac{5}{2},\ \frac{5}{4}\right)$

よって，

$y=-\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$

$=-x^2+5x-5$

$a=-1$，$b=5$，$c=-5$

10．次の問いに答えよ。

(1)　２次関数$y=ax^2+2x+a+1$が，最大値1をとるように定数aの値を定めよ。

最大値1をとるので，$a<0$

$y=a\left(x^2+\frac{2}{a}x\right)+a+1$

$=a\left(x+\frac{1}{a}\right)^2-\frac{1}{a}+a+1$

頂点$\left(-\frac{1}{a},\ -\frac{1}{a}+a+1\right)$

よって，

$- \quad + a+1=1$

$\Leftrightarrow\ a=\pm1$

$a<0$なので，$a=-1$

(2)　２次関数$y=ax^2-4x+2a$が，最小値2をとるように定数aの値を定めよ。

最小値2をとるので，$a>0$

$y=a\left(x^2-\frac{4}{a}x\right)+2a$

$=a\left(x-\frac{2}{a}\right)^2-\frac{4}{a}+2a$

頂点$\left(\frac{2}{a},\ -\frac{4}{a}+2a\right)$

よって，

$-\frac{4}{a}+2a=2$

$\Leftrightarrow\ a^2-a-2=0$

$\Leftrightarrow\ (a-2)(a+1)=0$

$a>0$なので，$a=-1$

11．次の問いに答えよ。

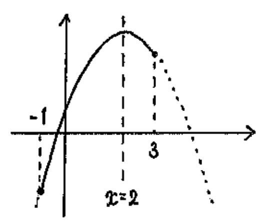
(1)　$a<0$とする。関数$y=ax^2-4ax+b$　$(-1\leqq x\leqq 3)$の最大値が7，最小値が-2のとき，定数a，bの値を求めよ。

$y=a(x^2-4x)+b$

$=a(x-2)^2-4a+b$

軸：$x=2$，頂点$(2,\ -4a+b)$

$a<0$なので，



・$x=2$のとき，最大なので，

$-4a+b=7$　…①

・$x=-1$のとき最小なので，

$5a+b=-2$　…②

①，②より，

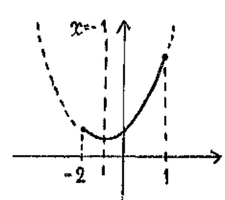
$a=-1$，$b=3$

(2)　関数$y=ax^2+2ax+b$　$(-2\leqq x\leqq 1)$の最大値が11，最小値が3のとき，定数a，bの値を求めよ。

$y=a(x+1)^2-a+b$

軸：$x=-1$，頂点$(-1,\ -a+b)$

[1]　$a>0$のとき，



・$x=1$のとき最大なので，

$3a+b=11$　…①

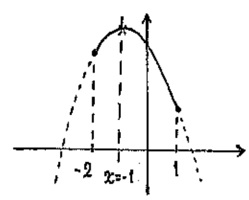
・$x=-1$のとき最小なので，

$-a+b=3$　…②

①，②より，

$a=2$，$b=5$

[2]　$a<0$のとき，



・$x=-1$のとき最大なので，

$-a+b=11$　…①

・$x=1$のとき最小なので，

$3a+b=3$　…②

①，②より，

$a=-2$，$b=9$

12. 次の問いに答えよ。

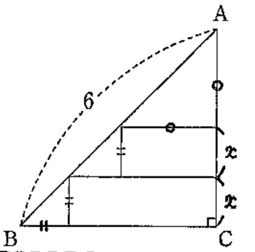
(1) AC=BC, AB=6 の直角二等辺三角形 ABC の中に，縦の長さが等しい２つの長方形を右の図のように作る。２つの長方形の面積の和が最大になるように作ったとき，その最大値を求めよ。

$AC = BC = 3\sqrt{2}$

長方形の縦の長さを x とすると，

横の長さはそれぞれ

$3\sqrt{2} - x$，$3\sqrt{2} - 2x$



求める面積の和を S とすると，

$S = x(3\sqrt{2}-x) + x(3\sqrt{2}-2x)$

$= -3x^2 + 6\sqrt{2}x$

$= -3(x-\sqrt{2})^2 + 6$

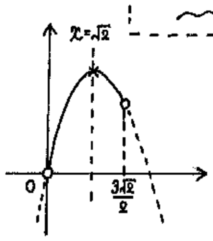
xの範囲は，$x>0$

$3\sqrt{2}-x>0$，$3\sqrt{2}-2x>0$

$\rightarrow 0 < x < \frac{3\sqrt{2}}{2}$

よって，

最大値 6 $(x=\sqrt{2})$

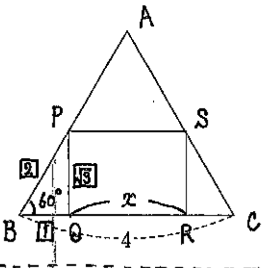


(2) 右の図のように，１辺の長さが４の正三角形に内接する長方形を作る。この長方形の面積の最大値と，そのときの縦と横の長さを求めよ。

長方形の横の長さを x とすると，

$BQ = CR = \frac{1}{2}(4-x)$

縦の長さは $\frac{\sqrt{3}}{2}(4-x)$



求める面積を S とすると，

$S = \frac{\sqrt{3}}{2}(4-x)\cdot x$

$= -\frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + 2\sqrt{3}x$

$= -\frac{\sqrt{3}}{2}(x-2)^2 + 2\sqrt{3}$

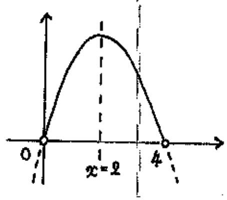
xの範囲は，

$x>0$，$\frac{1}{2}(4-x)>0$

$\rightarrow 0<x<4$

よって，

最大値 $2\sqrt{3}$ $(x=2)$



14. 関数 $f(x)=x^2-2ax+4a$ において，

(1) $f(x)$ の最小値を求めよ。

$f(x) = (x-a)^2 - a^2 + 4a$

よって，最小値 $-a^2+4a$ $(x=a)$

(2) (1) で求めた最小値を $g(a)$ とおくとき，$g(a)$ の最大値を求めよ。

$g(a) = -a^2 + 4a$

$= -(a-2)^2 + 4$

よって，最大値 4 $(a=2)$

15. 関数 $f(x)=-x^2+4ax+4a+1$ において，

(1) $f(x)$ の最大値を求めよ。

$f(x) = -(x^2-4ax) + 4a + 1$

$= -(x-2a)^2 + 4a^2 + 4a + 1$

よって，最大値 $4a^2+4a+1$ $(x=2a)$

(2) (1) で求めた最大値を $g(a)$ とおくとき，$g(a)$ の最小値を求めよ。

$g(a) = 4a^2 + 4a + 1$

$= 4(a+\frac{1}{2})^2$

よって，最小値 0 $(a=-\frac{1}{2})$

16. 次の問いに答えよ。

(1) $2x+y=1$ のとき，x^2+y^2 の最小値とそのときの x，y の値を求めよ。

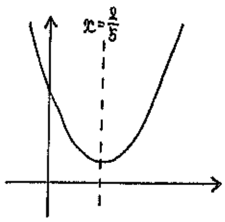
$2x+y=1$ より，$y=1-2x$

を代入して，

$x^2+(1-2x)^2 = 5x^2-4x+1$

$= 5(x-\frac{2}{5})^2 + \frac{1}{5}$

軸：$x=\frac{2}{5}$，頂点$(\frac{2}{5}, \frac{1}{5})$



よって，最小値 $\frac{1}{5}$ $(x=\frac{2}{5}, y=\frac{1}{5})$

(2) $y=x^2+1$ のとき，$2x^2-y^2$ の最大値とそのときの x，y の値を求めよ。

$y=x^2+1$ より，$x^2=y-1$

を代入して，

$2x^2-y^2 = 2(y-1)-y^2$

$= -y^2+2y-2$

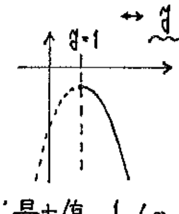
$= -(y-1)^2-1$

軸：$y=1$，頂点$(1, -1)$

yの範囲は

$x^2 \geqq 0$ なので，$y-1 \geqq 0$

$\leftrightarrow y \geqq 1$



よって，最大値 -1 $(x=0, y=1)$

(3) $x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$3x+y=8$ のとき，xy の最大値と最小値をそれぞれ求めよ。また，そのときの x，y の値を求めよ。

$3x+y=8$ より，$y=8-3x$

を代入して，

$xy = x(8-3x)$

$= -3x^2+8x$

$= -3(x-\frac{4}{3})^2 + \frac{16}{3}$

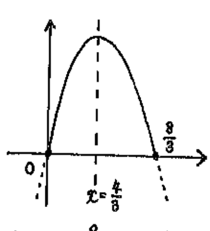
軸：$x=\frac{4}{3}$，頂点$(\frac{4}{3}, \frac{16}{3})$

xの範囲は，

$x \geqq 0$，$y \geqq 0$

$\leftrightarrow 8-3x \geqq 0$

$0 \leqq x \leqq \frac{8}{3}$



よって，

最大値 $\frac{16}{3}$，最小値 0

$(x=\frac{4}{3}, y=4)$　$(x=0, y=8$ または，$x=\frac{8}{3}, y=0)$