6年1組文系数学演習課題【三角関数：発展】

$\boxed{1}$ 関数 $y=a\sin(bx-c)+d$ ……① について考える。

ただし，$a>0$，$b>0$，$0\leqq c<2\pi$ とする。

関数①の周期のうち正で最小のものが $\dfrac{2\pi}{3}$ であるとき $b=\boxed{ア}$ である。

$b=\boxed{ア}$ において，関数①のグラフが，関数 $y=a\sin bx$ ……② のグラフを x 軸方向に $\dfrac{\pi}{6}$，y 軸方向に -1 だけ平行移動したものであるとき $c=\dfrac{\pi}{\boxed{イ}}$，$d=\boxed{ウエ}$ である。さらに，関数①のグラフが点 $\left(\dfrac{\pi}{3},\ 1\right)$ を通るとき $a=\boxed{オ}$ である。

よって，関数①と関数②のグラフにより，方程式 $a\sin bx=a\sin(bx-c)+d$ は

$0\leqq x\leqq 2\pi$ において $\boxed{カ}$ 個の解をもつことがわかる。

解答　(ア) 3　(イ) 2　(ウエ) -1　(オ) 2　(カ) 6

6年1組文系数学演習課題【三角関数：発展】

$\boxed{2}$ 座標平面において，O$(0,\ 0)$，A$(1,\ 0)$，B$(1,\ 2)$，P$(1,\ 1)$，Q$(a,\ b)$とする。ただし，$0<a<b$である。このとき，$\angle\mathrm{ABO}=\alpha$とすると，$\cos\alpha=\dfrac{\boxed{ア}}{\sqrt{\boxed{イ}}}$である。

$\triangle\mathrm{OAB}\backsim\triangle\mathrm{PQO}$であるとき，点Qの座標を求めよう。線分OQと$x$軸の正の向きとのなす角は$\dfrac{\pi}{\boxed{ウ}}+\alpha$であり，$\mathrm{OQ}=\dfrac{\boxed{エ}\sqrt{\boxed{オカ}}}{\boxed{キ}}$である。ここで，

$\cos\left(\dfrac{\pi}{\boxed{ウ}}+\alpha\right)=\dfrac{\boxed{ク}}{\sqrt{\boxed{ケコ}}}$，$\sin\left(\dfrac{\pi}{\boxed{ウ}}+\alpha\right)=\dfrac{\boxed{サ}}{\sqrt{\boxed{シス}}}$であるから，点Qの座標は$\left(\dfrac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}},\ \dfrac{\boxed{タ}}{\boxed{チ}}\right)$である。

解答　$\dfrac{(ア)}{\sqrt{(イ)}}$　$\dfrac{2}{\sqrt{5}}$　(ウ)　4　$\dfrac{(エ)\sqrt{(オカ)}}{(キ)}$　$\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$　$\dfrac{(ク)}{\sqrt{(ケコ)}}$　$\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

$\dfrac{(サ)}{\sqrt{(シス)}}$　$\dfrac{3}{\sqrt{10}}$　$\dfrac{(セ)}{(ソ)}$　$\dfrac{2}{5}$　$\dfrac{(タ)}{(チ)}$　$\dfrac{6}{5}$

6年1組文系数学演習課題【三角関数：発展】

$\boxed{3}$ $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で　$2\cos 2\theta - 5\sin\theta + 4 = 0$ ……① を満たす θ について考える。

(1)　方程式①を $\sin\theta$ を用いて表すと，$\boxed{\text{ア}}\sin^2\theta + 5\sin\theta - \boxed{\text{イ}} = 0$ となる。

したがって，$\sin\theta = \dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。

この等式を満たす θ の値を θ_1，θ_2 $(\theta_1 < \theta_2)$ とする。

(2)　θ_1 について不等式 $\boxed{\text{オ}}$ が成り立つ。$\boxed{\text{オ}}$ に当てはまるものを，次の ⓪～③ のうちから選べ。

⓪　$0 < \theta_1 < \dfrac{\pi}{6}$　　①　$\dfrac{\pi}{6} < \theta_1 < \dfrac{\pi}{4}$　　②　$\dfrac{\pi}{4} < \theta_1 < \dfrac{\pi}{3}$　　③　$\dfrac{\pi}{3} < \theta_1 < \dfrac{\pi}{2}$

(3)　不等式 $n\theta_1 > \theta_2$ を満たす自然数 n のうち最小のものは $\boxed{\text{カ}}$ である。

解答　(ア)　4　(イ)　6　$\dfrac{(\text{ウ})}{(\text{エ})}$　$\dfrac{3}{4}$　(オ)　②　(カ)　3

$\boxed{4}$ $\dfrac{\pi}{2} \leqq \alpha \leqq \pi$ として，$\sin\alpha = \cos 4\beta$ を満たす β について考える。ただし，$0 \leqq \beta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ とする。たとえば，$\alpha = \dfrac{5}{6}\pi$ のとき，β のとりうる値は $\dfrac{\pi}{\boxed{アイ}}$ と $\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エオ}}\pi$ の2つである。

このように，α の各値に対して，β のとりうる値は2つある。そのうちの小さい方を β_1，大きい方を β_2 とし，$y = \sin\left(\alpha - \dfrac{1}{2}\beta_1 - \dfrac{2}{3}\beta_2\right)$ の最大値と最小値を求めよう。β_1，β_2 を α を用いて表すと，$\beta_1 = -\dfrac{\pi}{\boxed{カ}} + \dfrac{\alpha}{\boxed{キ}}$，$\beta_2 = \dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}\pi - \dfrac{\alpha}{\boxed{コ}}$ となる。よって，

$\alpha - \dfrac{1}{2}\beta_1 - \dfrac{2}{3}\beta_2$ のとりうる値の範囲は $\dfrac{\pi}{\boxed{サ}} \leqq \alpha - \dfrac{1}{2}\beta_1 - \dfrac{2}{3}\beta_2 \leqq \dfrac{\boxed{シス}}{\boxed{セソ}}\pi$ である。

したがって，y は $\alpha = \dfrac{\boxed{タチ}}{\boxed{ツテ}}\pi$ のとき最大値 $\boxed{ト}$ をとり，$\alpha = \dfrac{\pi}{\boxed{ナ}}$ のとき最小値 $\boxed{ニ}$ をとる。ただし，$\boxed{ト}$，$\boxed{ニ}$ には，次の ⓪ ～ ③ のうちから当てはまるものを1つずつ選べ。

⓪ $\dfrac{1}{2}$　　① 1　　② $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　③ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

解答　(アイ) 12　$\dfrac{(ウ)}{(エオ)}$ $\dfrac{5}{12}$　(カ) 8　(キ) 4　$\dfrac{(ク)}{(ケ)}$ $\dfrac{5}{8}$　(コ) 4

(サ) 6　$\dfrac{(シス)}{(セソ)}$ $\dfrac{11}{16}$　$\dfrac{(タチ)}{(ツテ)}$ $\dfrac{41}{50}$　(ト) ①　(ナ) 2　(ニ) ⓪

5 $\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{3}{2}\pi$ のとき，$y=(\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta-2a)(\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta)+3$ について考える。ただし，a は実数とする。

$t=\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta$ とおくと　$t=\boxed{\text{ア}}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{\boxed{\text{イ}}}\right)$ であるから，t のとりうる値の範囲は $\boxed{\text{ウエ}} \leqq t \leqq \boxed{\text{オ}}$ である。

また，y を t で表すと　$y=t^2-\boxed{\text{カキ}}t+\boxed{\text{ク}}$ である。

さらに，y の最小値を $m(a)$ とおくと

$a \leqq \boxed{\text{ケコ}}$ のとき　$m(a)=\boxed{\text{サ}}a+\boxed{\text{シ}}$，

$\boxed{\text{ケコ}} < a < \boxed{\text{ス}}$ のとき　$m(a)=-a^2+\boxed{\text{セ}}$，

$\boxed{\text{ス}} \leqq a$ のとき　$m(a)=\boxed{\text{ソタ}}a+\boxed{\text{チ}}$

であり，$m(a)$ の最大値を M とすると $M=\boxed{\text{ツ}}$ である。

解答　(ア)　2　(イ)　3　(ウエ)　-1　(オ)　2　(カキ)　$2a$　(ク)　3
(ケコ)　-1　(サ)　2　(シ)　4　(ス)　2　(セ)　3　(ソタ)　-4
(チ)　7　(ツ)　3