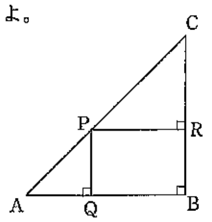
【最大値と最小値の応用】

11 次の問いに答えよ。

(1) AB=BC=6，∠B=90° の直角二等辺三角形 ABC において，右の図のように，辺 AC 上に点 A，C と異なる点 P をとり，P から辺 AB，BC へそれぞれ垂線 PQ，PR を下ろす。このときできる長方形 PQBR の面積の最大値とそのときの AQ の長さを求めよ。



AQ = x とすると，

PQ = x，BQ = $6-x$

xの範囲は，

$x>0$，$6-x>0$

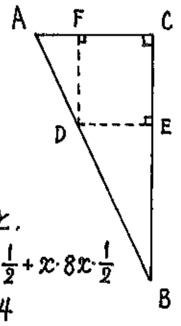
→ $0<x<6$

「長方形PQBR」= $x(6-x)$

$= -(x-3)^2+9$

よって，最大値 9（AQ=3）

(2) BC=48，CA=6 である直角三角形 ABC の斜辺 AB 上に点 D をとり，D から辺 BC と CA にそれぞれ垂線 DE と DF を引く。△ADF と △DBE の面積の合計が最小となるときの線分 DE の長さとそのときの面積を求めよ。



DE = x とすると，

DE : EB = AC : CB

= 1 : 8

↔ EB = $8x$

また，AF = $6-x$，CE = $48-8x$

x の範囲は，

$0<x<6$

求める面積を S とすると，

$S = (6-x)(48-8x)\cdot\frac{1}{2}+x\cdot 8x\cdot\frac{1}{2}$

$= 8x^2-48x+144$

$= 8(x-3)^2+72$

よって，最小値 72（DE=3）

12 次の問いに答えよ。

(1) a は定数とする。2次関数 $y=x^2+4ax+24a$ の最小値を $m(a)$ とする。

① $m(a)$ を a の式で表せ。

$y = (x+2a)^2-4a^2+24a$

よって，

$x=-2a$ のとき，最小値 $m(a) = -4a^2+24a$

② $m(a)$ を最大にする a の値と，$m(a)$ の最大値を求めよ。

$m(a) = -4a^2+24a$

$= -4(a-3)^2+36$

よって，最大値 36（$a=3$）

(2) k は定数とする。2次関数 $y=-x^2+kx+k$ の最大値 M を k で表せ。また，k の関数 M の最小値と，そのときの k の値を求めよ。

$y = -x^2+kx+k$

$= -(x-\frac{k}{2})^2+\frac{1}{4}k^2+k$

よって，

最大値 $M=\frac{1}{4}k^2+k$

$M = \frac{1}{4}k^2+k$

$= \frac{1}{4}(k+2)^2-1$

よって，

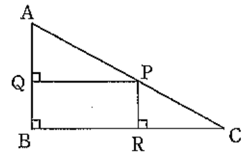
最小値 -1（$k=-2$）

～復習～

1．次の問いに答えよ。

(1) AB=4，BC=8，∠B=90° の直角三角形 ABC がある。右の図のように，辺 AC 上に点 A，C と異なる点 P をとり，P から辺 AB，BC へそれぞれ垂線PQ，PR を下ろす。

① AQ=x とするとき，PQ の長さを x を用いて表せ。



AQ : QP = AB : BC

= 1 : 2

よって，PQ = $2x$

② 長方形 PQBR の面積の最大値と，そのときの AQ の長さを求めよ。

BQ = $4-x$ より，

xの範囲は，

$x>0$，$4-x>0$

→ $0<x<4$

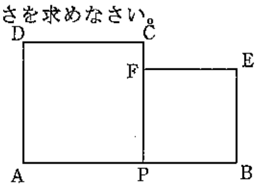
「長方形PQBR」= $2x(4-x)$

$= -2(x-2)^2+8$

よって，

最大値 8（AQ=2）

(2) 長さが 10 の線分 AB がある。右の図のように，AB 上に点 A，B と異なる点 P をとり，線分 AP，PB をそれぞれ1辺とする正方形 APCD，正方形 PBEF をつくる。正方形 APCD と正方形 PBEF の面積の和の最小値と，そのときの AP の長さを求めなさい。



AP = x とすると，

BP = $10-x$

xの範囲は，$0<x<10$

求める面積を S とすると，

$S = x^2+(10-x)^2$

$= 2x^2-20x+100$

$= 2(x-5)^2+50$

よって，最小値 50（AP=5）

2．次の問いに答えよ。

(1) a は定数とする。2次関数 $y=x^2-2ax+4a$ の最小値を m とする。

① m を a の式で表せ。

$y = (x-a)^2-a^2+4a$

よって，

$x=a$ のとき，最小値 $m = -a^2+4a$

② m を最大にする a の値と，m の最大値を求めよ。

$m = -a^2+4a$

$= -(a-2)^2+4$

よって，最大値 4（$a=2$）

(2) a は定数とする。2次関数 $y=-2x^2+3ax+a$ の最大値 M を a で表せ。また，a の関数 M の最小値と，そのときの a の値を求めよ。

$y = -2x^2+3ax+a$

$= -2(x-\frac{3}{4}a)^2+\frac{9}{8}a^2+a$

よって，

最大値 $\frac{9}{8}a^2+a$

$M = \frac{9}{8}a^2+a$

$= \frac{9}{8}(a+\frac{4}{9})^2-\frac{2}{9}$

よって，

最小値 $-\frac{2}{9}$（$a=-\frac{4}{9}$）

13 次の問いに答えよ。

(1) $2x+y=5$ のとき，x^2+y^2 の最小値と，そのときの x，y の値を求めよ。

$y=5-2x$ より，

$$x^2+y^2 = x^2+(5-2x)^2$$
$$= 5x^2-20x+25$$
$$= 5(x-2)^2+5$$

よって，

最小値 5 $(x=2,\ y=1)$

(2) $x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$3x+y=8$ のとき，xy の最大値と最小値をそれぞれ求めよ。また，そのときの x，y の値を求めよ。

$y=8-3x$ より，

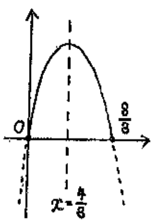
x の範囲は，

$8-3x \geqq 0$

$\leftrightarrow x \leqq \frac{8}{3}$

$0 \leqq x \leqq \frac{8}{3}$

$$xy = x(8-3x)$$
$$= -3x^2+8x$$
$$= -3\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\frac{16}{3}$$



よって，

最大値 $\frac{16}{3}$，最小値 0

$\left(x=\frac{4}{3},\ y=4\right)$　$\left(x=0,\ y=8 \text{ または } x=\frac{8}{3},\ y=0\right)$

～復習～

３．次の問いに答えよ。

(1) $x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$x+3y=6$ のとき，x^2+3y^2 の最大値と最小値をそれぞれ求めよ。また，そのときの x，y の値を求めよ。

$x=6-3y$ より，

y の範囲は，

$6-3y \geqq 0$

$\leftrightarrow y \leqq 2$

$0 \leqq y \leqq 2$

$$x^2+3y^2 = (6-3y)^2+3y^2$$
$$= 12y^2-36y+36$$
$$= 12\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+9$$

よって，

最大値 36，最小値 9

$(x=6,\ y=0)$　$\left(x=\frac{3}{2},\ y=\frac{3}{2}\right)$

(2) $6x+y^2=12$ のとき，x^2+y^2 の最小値と，そのときの x，y の値を求めよ。

$y^2=12-6x$ より，

x の範囲は，

$y^2 \geqq 0$ なので，

$12-6x \geqq 0$

$\leftrightarrow x \leqq 2$

$$x^2+y^2 = x^2+(12-6x)$$
$$= (x-3)^2+3$$

よって，

最小値 3

$(x=3)$