6C5年数学Ⅱ【三角関数】5月22日課題（応用）

$\boxed{1}$ 2次方程式 $5x^2-7x+k=0$ の2つの解が $\sin\theta$，$\cos\theta$ であるとき，定数 k の値と $\sin^3\theta+\cos^3\theta$ の値を求めよ。

$5x^2-7x+k=0$ の2つの解が $\sin\theta$，$\cos\theta$ であるから，解と係数の関係により

$$\sin\theta+\cos\theta=\frac{7}{5}\quad\cdots\cdots①,\qquad \sin\theta\cos\theta=\frac{k}{5}\quad\cdots\cdots②$$

① の両辺を平方すると　$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{49}{25}$

よって　$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{49}{25}$　　これに ② を代入して　$1+2\cdot\dfrac{k}{5}=\dfrac{49}{25}$

ゆえに　$k=\dfrac{12}{5}$　　これを ② に代入すると　$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{12}{25}$

よって　$\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)^3-3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)$

$$=\left(\frac{7}{5}\right)^3-3\cdot\frac{12}{25}\cdot\frac{7}{5}=\frac{91}{125}$$

$\boxed{2}$ 2次方程式 $3x^2+4x+a=0$ の2つの解が $\sin\theta$，$\cos\theta$ であるとき，定数 a の値を求めよ。また，2つの解を求めよ。

解と係数の関係から

$$\sin\theta+\cos\theta=-\frac{4}{3}\cdots\cdots①,\quad \sin\theta\cos\theta=\frac{a}{3}\cdots\cdots②$$

① の両辺を平方すると　$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\left(-\dfrac{4}{3}\right)^2$

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{16}{9}$$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ と ② から　$1+\dfrac{2}{3}a=\dfrac{16}{9}$

よって　$a=\dfrac{7}{6}$

これを与えられた方程式に代入して整理すると　$18x^2+24x+7=0$

したがって，2つの解は　$x=\dfrac{-4\pm\sqrt{2}}{6}$

$-1<\dfrac{-4\pm\sqrt{2}}{6}<1$，$\left(\dfrac{-4+\sqrt{2}}{6}\right)^2+\left(\dfrac{-4-\sqrt{2}}{6}\right)^2=1$ で条件を満たす。

$\boxed{3}$ (1)　$\sin\theta+\sin^2\theta=1$ のとき，$1+\cos^2\theta+\cos^4\theta$ の値を求めよ。

(2)　4つの数 $\sin 0$，$\sin 1$，$\sin 2$，$\sin 3$ の大小を不等号を用いて表せ。

(1)　$\sin\theta+\sin^2\theta=1$ から　　$\sin\theta=1-\sin^2\theta$

よって　　$\sin\theta=\cos^2\theta$

したがって　　$1+\cos^2\theta+\cos^4\theta=1+\cos^2\theta+(\cos^2\theta)^2$

$$=1+\sin\theta+\sin^2\theta$$
$$=1+1=2$$

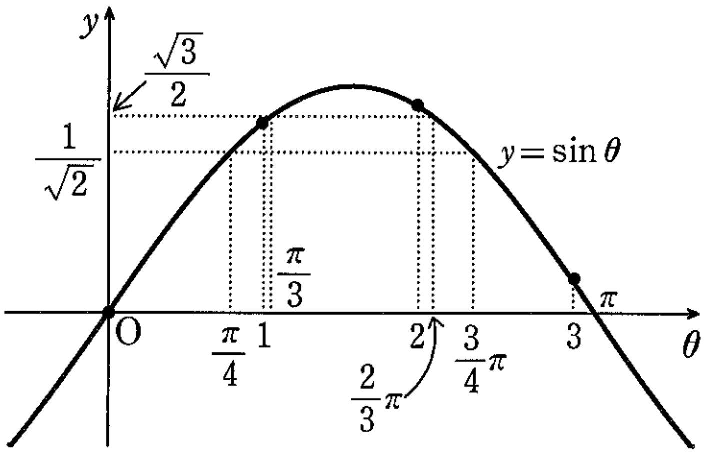
(2)　$\sin 0=0$

$\frac{\pi}{4}<1<\frac{\pi}{3}$ であるから　　$\frac{1}{\sqrt{2}}<\sin 1<\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{\pi}{3}<2<\frac{2}{3}\pi$ であるから　　$\frac{\sqrt{3}}{2}<\sin 2<1$

$\frac{3}{4}\pi<3<\pi$ であるから　　$0<\sin 3<\frac{1}{\sqrt{2}}$

よって　　$\sin 0<\sin 3<\sin 1<\sin 2$

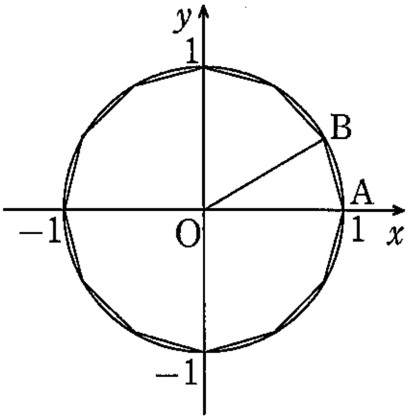


6C5年数学Ⅱ【三角関数】5月22日課題（応用）

$\boxed{4}$ 右の図のように，半径1の円に正十二角形が内接している。

(1) 1辺の長さABを求めよ。

(2) 円の直径に対する正十二角形の周の長さの割合を小数第1位まで求めよ。
ただし，$\sqrt{6}=2.449\cdots$，$\sqrt{2}=1.414\cdots$　とする。



(1) 正十二角形であるから　$\angle \mathrm{AOB}=\dfrac{360^\circ}{12}=30^\circ$

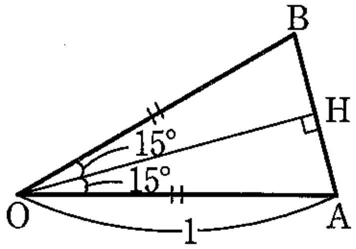
点Oから線分ABに下ろした垂線をOHとすると

$$\angle \mathrm{AOH}=30^\circ\div 2=15^\circ$$

よって　$\mathrm{AB}=2\mathrm{AH}=2\cdot \mathrm{OA}\sin 15^\circ=2\sin(45^\circ-30^\circ)$

$$=2(\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ)$$

$$=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$



(2) $$\frac{\text{正十二角形の周の長さ}}{\text{円の直径}}=\frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\times 12}{2\times 1}=3(\sqrt{6}-\sqrt{2})$$

$$=3(2.449\cdots-1.414\cdots)=3\times 1.035\cdots$$

$$=3.10\cdots$$

したがって，求める値は　3.1