$\boxed{1}$ (1) $(2x-7y)^2=(2x)^2-2\cdot 2x\cdot 7y+(7y)^2=4x^2-28xy+49y^2$

(2) $(2p+3q)(5p-11q)=2\cdot 5p^2+\{2\cdot(-11)+3\cdot 5\}pq+3\cdot(-11)q^2$

$=10p^2-7pq-33q^2$

$\boxed{2}$ (1) $36a^2-100b^2=4(9a^2-25b^2)=4\{(3a)^2-(5b)^2\}=4(3a+5b)(3a-5b)$

(2) $(x^2+2x)^2-2(x^2+2x)-3=\{(x^2+2x)+1\}\{(x^2+2x)-3\}$

$=(x+1)^2(x-1)(x+3)$

← x^2+2x をひとかたまりとみる。

$\boxed{3}$ (1) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{3-1}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

(2) $\dfrac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}+\dfrac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}=\dfrac{2(\sqrt{7}+\sqrt{3})+4(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3})}$

$=\dfrac{6\sqrt{7}-2\sqrt{3}}{7-3}=\dfrac{3\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}$

$\boxed{4}$ 不等式の両辺に -30 を掛けて　$6(18+x)\geqq 10x-3$

よって　$108+6x\geqq 10x-3$　　ゆえに　$4x\leqq 111$

したがって　$x\leqq\dfrac{111}{4}=27.75$

これを満たす自然数 x は　1, 2, 3, ……, 27　の 27 個

$\boxed{5}$ (1) $x^2=5$ から　$x=\pm\sqrt{5}$

よって,「$x^2=5 \Longrightarrow x$ は無理数」は真。

「x は無理数 $\Longrightarrow x^2=5$」は偽。(反例：$x=\sqrt{2}$)

したがって，十分条件であるが必要条件ではない。

(2) 「$x+y>3 \Longrightarrow x>5$ かつ $y>-2$」は偽。(反例：$x=4$, $y=0$)

$x>5$ かつ $y>-2$ のとき　$x+y>5+(-2)=3$

よって,「$x>5$ かつ $y>-2 \Longrightarrow x+y>3$」は真。

したがって，必要条件であるが十分条件ではない。

(3) $|x+1|=2$ から　$x+1=\pm 2$　　よって　$x=1$ または $x=-3$

また, $(x-1)(x+3)=0$ から　$x=1$ または $x=-3$

よって，条件 $|x+1|=2$ と条件 $(x-1)(x+3)=0$ は同値である。

したがって，必要十分条件である。

←「$|x+1|=2$ ならば $(x-1)(x+3)=0$」と,「$(x-1)(x+3)=0$ ならば $|x+1|=2$」がともに真となる。

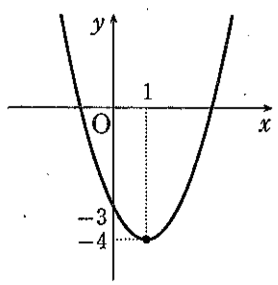
$\boxed{6}$ (1) $y=x^2-2x-3$

$=(x-1)^2-1^2-3$

$=(x-1)^2-4$

よって，グラフは右の図のようになる。

軸は直線 $x=1$，頂点は点 $(1,\ -4)$



(2) $y=-3x^2+15x-18$

$=-3(x^2-5x)-18$

$=-3\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+3\cdot\left(\dfrac{5}{2}\right)^2-18$

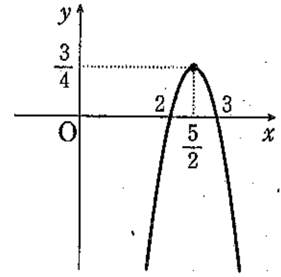
$=-3\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$

また，$-3x^2+15x-18=0$ とすると

$-3(x-2)(x-3)=0$ から　$x=2,\ 3$

よって，グラフは右の図のようになる。

軸は直線 $x=\dfrac{5}{2}$，頂点は点 $\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{3}{4}\right)$



$\boxed{7}$ (1) 方程式の x, y をそれぞれ $x+3$, $y-2$ でおき換えて

$y-2=2(x+3)^2-4(x+3)+3$

すなわち　$y=2x^2+8x+11$

← $y=ax^2+bx+c$ のグラフを x 軸方向に p, y 軸方向に q だけ平行移動したグラフの方程式は　$y-q=a(x-p)^2+b(x-p)+c$

(2) (x 軸) 方程式の y を $-y$ でおき換えて

$-y=x^2+6x-5$　　すなわち　$y=-x^2-6x+5$

(y 軸) 方程式の x を $-x$ でおき換えて

$y=(-x)^2+6(-x)-5$　　すなわち　$y=x^2-6x-5$

(原点) 方程式の x, y をそれぞれ $-x$, $-y$ でおき換えて

$-y=(-x)^2+6(-x)-5$　　すなわち　$y=-x^2+6x+5$

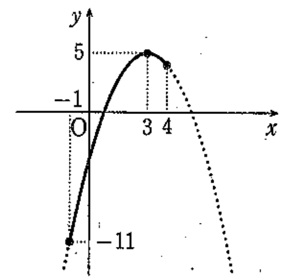
$\boxed{8}$ (1) 関数の式を変形すると

$y=-(x-3)^2+5$　$(-1\leqq x\leqq 4)$

よって，y は

$x=3$ で最大値 5,

$x=-1$ で最小値 -11　をとる。



(2) 関数の式を変形すると

$y=(x-2)^2+1$　$(0\leqq x\leqq a)$

[1] $0<a<2$ のとき

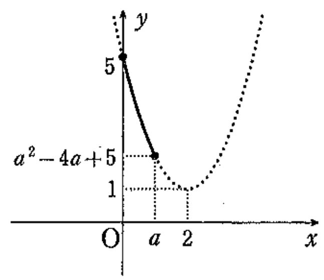
y は $x=a$ で最小値 a^2-4a+5 をとる。

[2] $2\leqq a$ のとき

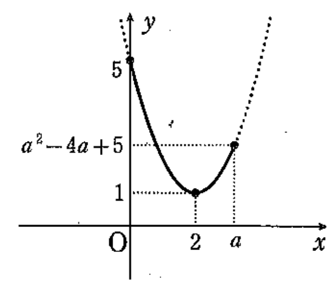
y は $x=2$ で最小値 1 をとる。

← 軸は $x=2$ で固定。これと区間の右端との位置関係を考える。

[1]



[2]



$\boxed{9}$ (1) $10x^2+3\geqq 11x$ から　$10x^2-11x+3\geqq 0$

左辺を因数分解して　$(2x-1)(5x-3)\geqq 0$

よって　$x\leqq\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{5}\leqq x$

2	-1	$\to -5$
5	-3	$\to -6$
10	3	-11

(2) $2x-3 \leqq x^2-2x<15$ から

$$\begin{cases} 2x-3 \leqq x^2-2x & \cdots\cdots ① \\ x^2-2x<15 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

① から　$x^2-4x+3 \geqq 0$　すなわち　$(x-1)(x-3) \geqq 0$

よって　$x \leqq 1,\ 3 \leqq x$　……③

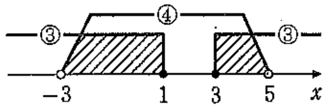
② から　$x^2-2x-15<0$

すなわち　$(x+3)(x-5)<0$

よって　$-3<x<5$　……④

③ と ④ の共通範囲を求めて

$-3<x \leqq 1,\ 3 \leqq x<5$



← $A \leqq B<C$ は $A \leqq B$ かつ $B<C$

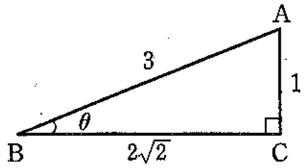
10 (1) 三平方の定理により

$\mathrm{BC}=\sqrt{3^2-1^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

よって　$\sin\theta=\dfrac{\mathrm{CA}}{\mathrm{AB}}=\dfrac{1}{3}$

$\cos\theta=\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$\tan\theta=\dfrac{\mathrm{CA}}{\mathrm{BC}}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$



(2) $\tan\theta=\dfrac{17}{9}=1.8888\cdots\cdots$

よって，三角比の表から　$\theta \fallingdotseq 62^\circ$

← 三角比の表から，θ に近い値を求める。

11 右の図において

$\mathrm{AE}=8\times\tan 40^\circ=8\times 0.8391$

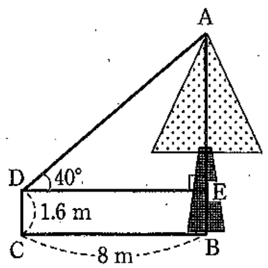
$=6.7128$

よって，木の高さ AB は

$\mathrm{AB}=\mathrm{AE}+\mathrm{EB}=\mathrm{AE}+\mathrm{DC}$

$=6.7128+1.6=8.3128$

$\fallingdotseq 8.3$ (m)



← 目の高さ 1.6 m を忘れないようにする。

12 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ から

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^2=\dfrac{9}{25}$

θ が鈍角のとき，$\cos\theta<0$ であるから

$\cos\theta=-\sqrt{\dfrac{9}{25}}=-\dfrac{3}{5}$

また　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{4}{5}\div\left(-\dfrac{3}{5}\right)=\dfrac{4}{5}\times\left(-\dfrac{5}{3}\right)$

$=-\dfrac{4}{3}$

13 (1) 余弦定理から

$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$

$=5^2+(2\sqrt{3})^2-2\cdot 5\cdot 2\sqrt{3}\cos 30^\circ$

$=25+12-20\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=7$

$b>0$ であるから　$b=\sqrt{7}$

(2) $C=180^\circ-(A+B)=180^\circ-(30^\circ+15^\circ)=135^\circ$

正弦定理から　$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$

すなわち　$\dfrac{a}{\sin 30^\circ}=\dfrac{10}{\sin 135^\circ}=2R$

ここで　$\dfrac{10}{\sin 135^\circ}=10\div\dfrac{1}{\sqrt{2}}=10\sqrt{2}$

よって，$\dfrac{a}{\sin 30^\circ}=10\sqrt{2}$ であるから

$a=10\sqrt{2}\sin 30^\circ=10\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{2}=5\sqrt{2}$

また，$2R=10\sqrt{2}$ から　$R=5\sqrt{2}$

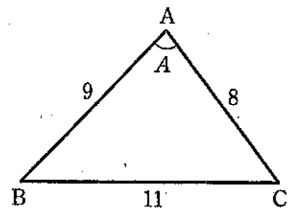
← 対辺の長さがわかっている角度を考える。

14 (1) 余弦定理から

$\cos A=\dfrac{8^2+9^2-11^2}{2\cdot 8\cdot 9}$

$=\dfrac{64+81-121}{2\cdot 8\cdot 9}$

$=\dfrac{24}{2\cdot 8\cdot 9}=\dfrac{1}{6}$



← $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

(2) $\sin A>0$ であるから

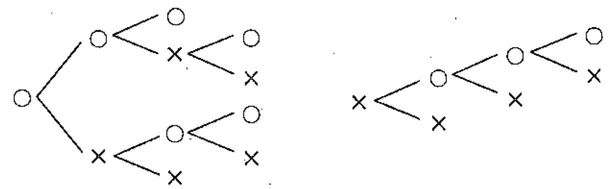
$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}$

$=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{6}\right)^2}$

$=\sqrt{\dfrac{35}{36}}=\dfrac{\sqrt{35}}{6}$

よって　$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\cdot 8\cdot 9\cdot\dfrac{\sqrt{35}}{6}=6\sqrt{35}$

16 (1) 3 回表が出るか，2 回裏が出るまでの出方を樹形図にかくと，次のようになる。ただし，○は表，×は裏を表している。



よって　10 通り

(2) 異なる硬貨を用いて，同じ金額を表すことはない。

10 円硬貨の使い方は 0 枚～4 枚の　5 通り

100 円硬貨の使い方は 0 枚～4 枚の　5 通り

500 円硬貨の使い方は 0 枚～2 枚の　3 通り

ただし，全部 0 枚の場合は支払うことができない。

よって，支払える金額は　$5\times 5\times 3-1=74$ (通り)

17 (1) $(8-1)!=7!=5040$ (通り)

(2) 10 個の頂点はどの 3 点も一直線上にないから，3 個の点を 1 組定めると三角形が 1 個作れる。

よって　${}_{10}\mathrm{C}_3=\dfrac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1}=120$ (個)

(3) 女子2人をまとめて1組と考え，この1組と男子4人の並び方は　5! 通り
そのどの場合に対しても，女子2人の並び方は　2! 通り
よって　$5!\times 2!=120\times 2=240$（通り）

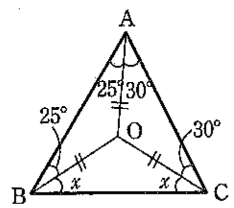
18 2個のさいころの目の出方は　$6^2=36$（通り）
(1) 目の和が9になるのは　(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)　の4通り。
よって，求める確率は　$\dfrac{4}{36}=\dfrac{1}{9}$
(2) 目の積が16以上になるのは
(3, 6), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 4), (5, 5),
(5, 6), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)
の11通り。
よって，求める確率は　$\dfrac{11}{36}$

19 1回の試行で，3の倍数の目が出る確率は　$\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$
よって，求める確率は　${}_5C_3\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{40}{243}$

←1回の試行で3の倍数の目が出ない確率は　$1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$

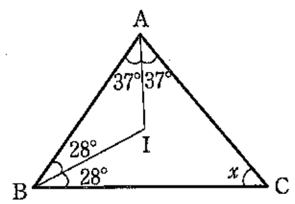
20 (1) 1個目に赤玉が出たとき，袋の中には赤玉4個，白玉3個が入っている。よって，求める条件付き確率は　$\dfrac{4}{7}$
(2) 2個目に赤玉が出るのは，
[1] 1個目に赤玉が出て，2個目に赤玉が出る。
[2] 1個目に白玉が出て，2個目に赤玉が出る。
の2つの場合があり，これらの事象は互いに排反である。
よって，求める確率は　$\dfrac{5}{8}\times\dfrac{4}{7}+\dfrac{3}{8}\times\dfrac{5}{7}=\dfrac{5}{8}$

21 (1) 点Oは△ABCの外心であるから
$OA=OB=OC$
よって　$\angle OBA=\angle OAB=25^\circ$
$\angle OAC=\angle OCA=30^\circ$
$\angle OCB=\angle OBC=x$
△ABCの内角の和は180°であるから
$2\times 25^\circ+2\times 30^\circ+2x=180^\circ$
したがって　$x=35^\circ$



←△OAB，△OBC，△OCAはすべて二等辺三角形。

(2) 点Iは△ABCの内心であるから
$\angle IAB=\angle IAC=37^\circ$
$\angle IBC=\angle IBA=28^\circ$
△ABCの内角の和は180°であるから
$2\times 37^\circ+2\times 28^\circ+x=180^\circ$
したがって　$x=50^\circ$



←内心と頂点を結ぶ直線は，内角を2等分する。

22 (1) △ABDにおいて　$\angle BAD=180^\circ-(50^\circ+60^\circ)=70^\circ$
四角形ABCDは円に内接しているから　$\angle BAD+\angle BCD=180^\circ$
すなわち　$70^\circ+x=180^\circ$　　よって　$x=110^\circ$
(2) 四角形ABCDは円に内接しているから　$\angle BCD=180^\circ-100^\circ=80^\circ$
また，接線と弦の作る角により　$\angle CBD=46^\circ$
よって，△BCDにおいて　$x=180^\circ-(80^\circ+46^\circ)=54^\circ$

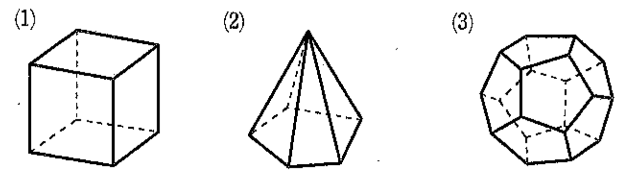
23 方べきの定理により　$PA\cdot PB=PC\cdot PD$
すなわち　$x(x+5)=3\cdot(3+9)$　　よって　$x^2+5x-36=0$
左辺を因数分解して　$(x-4)(x+9)=0$
$x>0$ であるから　$x=4$

24 (1) 辺BCと平行な辺は　辺AD，辺EH，辺FG
(2) 辺BCと垂直な辺は　辺AE，辺BF，辺CG，辺DH
(3) 辺BCと平行な面は，辺BCと共有点をもたない面であるから
面AEHD，面EFGH
(4) 辺BCとねじれの位置にある辺は，辺BCと同じ平面上にない辺であるから
辺AE，辺DH，辺EF，辺HG

←辺AEと辺DHは辺BCと垂直かつねじれの位置にある。

25 (1) 面の数6，頂点の数8，辺の数12
(2) 面の数6，頂点の数6，辺の数10
(3) 面の数12
1つの頂点に3つの面が集まっているから，頂点の数は
$5\times 12\div 3=20$
1つの辺に2つの面が集まっているから，辺の数は
$5\times 12\div 2=30$

←正十二面体の面は正五角形。



26 (1) 右の計算から　$280=2^3\cdot 5\cdot 7$
(2) $\sqrt{280n}$ が自然数になるのは，$280n$ がある自然数の2乗になるとき，すなわち，$280n$ を素因数分解したときの各素因数の指数がすべて偶数になるときである。よって，(1)から，求める最小の自然数 n は　$n=2\cdot 5\cdot 7=70$

2) 280
2) 140
2) 70
5) 35
7

←$N>0$ のとき $\sqrt{N^2}=N$

27 (1) $60=2^2\cdot 3\cdot 5$，　$168=2^3\cdot 3\cdot 7$
よって，60と168の最大公約数は　$2^2\cdot 3=12$
最小公倍数は　$2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 7=840$
(2) $1829=413\cdot 4+177$
$413=177\cdot 2+59$
$177=59\cdot 3+0$
よって，1829と413の最大公約数は　59

3	2	4
59) 177	) 413	) 1829
177	354	1652
0	59	177

28 a, b は，整数 k, l を用いて $a=6k+5$, $b=6l+4$ と表される。

(1) $a+2b=(6k+5)+2(6l+4)=6k+12l+5+8=6(k+2l+2)+1$

$k+2l+2$ は整数であるから，$a+2b$ を 6 で割ったときの余りは 1

(2) $ab=(6k+5)(6l+4)=36kl+24k+30l+20=6(6kl+4k+5l+3)+2$

$6kl+4k+5l+3$ は整数であるから，ab を 6 で割ったときの余りは 2

29 $3x+7y=1$ ……①

$x=-2$, $y=1$ は，① の整数解の 1 つである。

←x, y に適当な値を代入して，整数解の 1 つを見つける。

よって $3\cdot(-2)+7\cdot1=1$ ……②

①−② から $3(x+2)+7(y-1)=0$

すなわち $3(x+2)=-7(y-1)$ ……③

3 と 7 は互いに素であるから，$x+2$ は 7 の倍数である。

よって，k を整数として $x+2=7k$ と表される。

これと ③ から $y-1=-3k$

したがって，① のすべての整数解は

$x=7k-2$, $y=-3k+1$ （k は整数）

30 (1) $xy+7x-3y=(x-{}^{ア}3)(y+{}^{イ}7)+{}^{ウ}21$

(2) 等式から $(x-3)(y+7)+21=16$

すなわち $(x-3)(y+7)=-5$

x, y は整数であるから，$x-3$, $y+7$ も整数である。

よって $(x-3,\ y+7)=(1,\ -5),\ (5,\ -1),\ (-1,\ 5),\ (-5,\ 1)$

←5 は素数であるから，組合せはこの 4 つのみ。

したがって $(x,\ y)=(4,\ -12),\ (8,\ -8),\ (2,\ -2),\ (-2,\ -6)$

31 (1) 下の計算から $1111011_{(2)}$

(2) 下の計算から $11120_{(3)}$

(3) 下の計算から $234_{(7)}$

←(1) $123=1\cdot2^6+1\cdot2^5+1\cdot2^4+1\cdot2^3+0\cdot2^2+1\cdot2^1+1\cdot2^0$

(2) $123=1\cdot3^4+1\cdot3^3+1\cdot3^2+2\cdot3^1+0\cdot3^0$

(3) $123=2\cdot7^2+3\cdot7^1+4\cdot7^0$

左の計算では，係数の部分を求めている。

(1)

		余り
2)	123	
2)	61	… 1
2)	30	… 1
2)	15	… 0
2)	7	… 1
2)	3	… 1
2)	1	… 1
	0	… 1

(2)

		余り
3)	123	
3)	41	… 0
3)	13	… 2
3)	4	… 1
3)	1	… 1
	0	… 1

(3)

		余り
7)	123	
7)	17	… 4
7)	2	… 3
	0	… 2

1.

思考のカギ

目標としている問題数を未知数 x とおき，問題文の内容から大小関係を適切に把握し，不等式をたてて考える。未知数が整数であるから，その値は具体的に求められる。また，別の量を未知数とすることも考えてみるのもよい。

解答

目標としている問題数を x とおくと，予定した日数は $\dfrac{x-28}{6}$ と表される。

1 日に 13 題ずつ解いた場合，予定した最後の日の前日には目標としている問題数に達していないことから $13\left(\dfrac{x-28}{6}-1\right)<x<13\cdot\dfrac{x-28}{6}$

←不等式の各辺が整数であることから $13\left(\dfrac{x-28}{6}-1\right)+1\leqq x\leqq 13\cdot\dfrac{x-28}{6}-1$ としてもよい。

すなわち $\begin{cases} 13\left(\dfrac{x-28}{6}-1\right)<x \\ x<13\cdot\dfrac{x-28}{6} \end{cases}$ これを解いて $52<x<\dfrac{442}{7}$

$63<\dfrac{442}{7}<64$ であるから，不等式を満たす自然数 x は $x=53,\ 54,\ \cdots\cdots,\ 63$

予定した日数の $\dfrac{x-28}{6}$ は自然数であるから，$x-28$ が 6 の倍数となるために $x=58$ と決まる。したがって，目標としている問題数は 58 題

2.

思考のカギ

必要条件や十分条件の定義を思い出してみよう。「p ならば q」と「q ならば p」のどちらが真で，どちらが偽であればよいだろうか。また，答を書くときには数学的に正しい表現になるように注意しよう。

解答

解答例

△ABC と △DEF が合同ならば，△ABC と △DEF は相似である。

四角形 ABCD が長方形ならば，四角形 ABCD は平行四辺形である。

自然数 n が 3 以上の素数ならば，n は奇数である。

四角形 ABCD が正方形ならば，四角形 ABCD はひし形である。

x が無理数ならば，x は実数である。

△ABC が直角二等辺三角形ならば，△ABC は二等辺三角形である。

正答のポイント

数学的に正しい表現で，「p ならば q」が真であるような命題を 5 つ以上記述していること。

命題「q ならば p」も真になっているものは，必要条件ではないという条件に反するため，不可とする。

←自然数 n が 2 の倍数ならば，n は偶数である，など。

3．

思考のカギ

設定が複雑なため，$y=f(x)$ のグラフと x 軸の位置関係や不等式が表す範囲をしっかり図にかいて，状況を整理しよう。

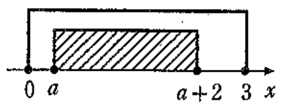
解答

(1) $f(x)=x^2-2(a+1)x+a(a+2)=(x-a)\{x-(a+2)\}$

$a<a+2$ であるから，不等式 $f(x)\leqq 0$ の解は　$a\leqq x\leqq a+2$

$f(x)\leqq 0$ の解が $0\leqq x\leqq 3$ の範囲に含まれるための条件は　$a\geqq 0$ かつ $a+2\leqq 3$

よって，求める a の値の範囲は　$0\leqq a\leqq 1$



(2) (i) $f(x)\leqq 1$ から　$f(x)-1\leqq 0$

(1)から，$y=f(x)-1$ のグラフは a の値によらず x 軸と異なる2つの共有点をもつ。

よって，不等式 $f(x)\leqq 1$ の解が $0\leqq x\leqq 3$ の範囲に含まれるとき，

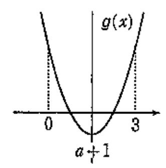
$y=f(x)-1$ のグラフと x 軸が $0\leqq x\leqq 3$ において異なる2つの共有点をもつ。

したがって，正しいものは　②

←$y=f(x)$ のグラフが下に凸で x 軸と異なる2つの共有点をもつから，y 軸方向に -1 だけ平行移動したものも x 軸と異なる2つの共有点をもつ。

(ii) $g(x)=f(x)-1$ とおくと

$$g(x)=x^2-2(a+1)x+a^2+2a-1=\{x-(a+1)\}^2-2$$



求める条件は　$0<a+1<3$ かつ $g(0)\geqq 0$ かつ $g(3)\geqq 0$

$0<a+1<3$ から　$-1<a<2$　……①

$g(0)\geqq 0$ から　$a^2+2a-1\geqq 0$

$a^2+2a-1=0$ を解くと $a=-1\pm\sqrt{2}$ であるから

$$a\leqq -1-\sqrt{2},\ -1+\sqrt{2}\leqq a\ \cdots\cdots ②$$

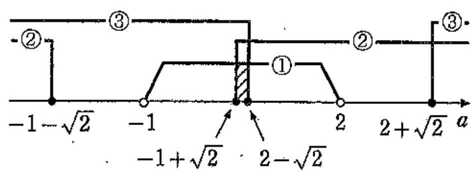
$g(3)\geqq 0$ から　$a^2-4a+2\geqq 0$

$a^2-4a+2=0$ を解くと $a=2\pm\sqrt{2}$ であるから

$$a\leqq 2-\sqrt{2},\ 2+\sqrt{2}\leqq a\ \cdots\cdots ③$$

求める a の値の範囲は，①，②，③ の共通範囲であるから

$$-1+\sqrt{2}\leqq a\leqq 2-\sqrt{2}$$



4．

思考のカギ

C が鋭角のときと鈍角のときでは何が異なるか，実際に図をかいて考えてみるとよい。

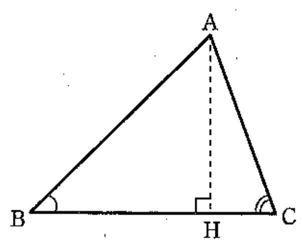
解答

(1) ①，②，③ から

$$BC=\frac{AH}{\tan B}+\frac{AH}{\tan C}$$

$$=AH\left(\frac{1}{\tan B}+\frac{1}{\tan C}\right)$$

よって　$AH=\dfrac{BC}{\dfrac{1}{\tan B}+\dfrac{1}{\tan C}}$



$$=\frac{BC\tan B\tan C}{\tan B+\tan C}$$

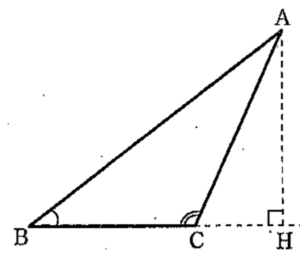
したがって　$S=\dfrac{1}{2}BC\cdot AH=\dfrac{a^2\tan B\tan C}{2(\tan B+\tan C)}$

(2) C が鈍角のとき，右の図の直角三角形 ACH において $\tan(180^\circ-C)=\dfrac{AH}{CH}$ であるから

$$-\tan C=\frac{AH}{CH}$$

よって，② を $CH=-\dfrac{AH}{\tan C}$ と修正する。

また，③ は $BC=BH-CH$ と修正する。



←C と H の位置関係が，鋭角三角形の場合とは逆になる。

参考　S については，(1) と同様に

$$S=\frac{a^2\tan B\tan C}{2(\tan B+\tan C)}$$

となる。

5．

思考のカギ

確率の定義に沿って考えればよい。本問では，場合の数を考える際に順列の考え方を用いることも，組合せの考え方を用いることもできる。

解答

(1) 30人の座り方の総数は　30! 通り

このうち，A さんが席替え前と同じ席になる場合の数は，他の29人の座り方の総数に等しいから　29! 通り

よって，求める確率は　$\dfrac{29!}{30!}=\dfrac{1}{30}$

別解　A さんの座り方は　30通り

このうち，A さんが席替え前に座っていた席は1通りだけであるから

$$\frac{1}{30}$$

(2) (i) 最前列に並ぶ6席に $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}\boxed{5}\boxed{6}$ と番号をつけるとき，この最前列において，隣どうしとなる席の組合せは $\boxed{1}\boxed{2}$，$\boxed{2}\boxed{3}$，$\boxed{3}\boxed{4}$，$\boxed{4}\boxed{5}$，$\boxed{5}\boxed{6}$ の ア5 通りあるから，30席全体で，隣どうしとなる席の組合せは $5\times 5=$ イ25 通りある。

A さんと B さんの座り方がそれぞれ 2! 通りあるから，A さんと B さんが隣どうしになる場合の数は　$25\times 2!=50$ (通り)

そのどの場合に対しても，他の28人の座り方が 28! 通りずつある。

よって，A さんと B さんが隣どうしになる確率は

$$\frac{50\times 28!}{30!}=\frac{50}{30\cdot 29}=\frac{5}{87}$$

別解　30席全体から，2つの席を選ぶ選び方は　${}_{30}C_2=\dfrac{30\cdot 29}{2\cdot 1}=435$ (通り)

このうち，A さんと B さんが隣どうしとなるのは25通りであるから

$$\frac{25}{435}=\frac{5}{87}$$

(ii) [1]　A さんの座り方は 10 通りある。そのどの場合に対しても，B さんが座る隣の席は 1 通りで，他の 28 人の座り方は 28! 通りある。

よって，A さんが左端または右端の席に座る場合の数は

$$10\times1\times28!=10\times28!\ (\text{通り})$$

[2]　A さんの座り方は 20 通りある。そのどの場合に対しても，B さんが座る隣の席は 2 通りで，他の 28 人の座り方は 28! 通りある。

よって，A さんが [1] 以外の席に座る場合の数は

$$20\times2\times28!=40\times28!\ (\text{通り})$$

[1]，[2] から，求める確率は

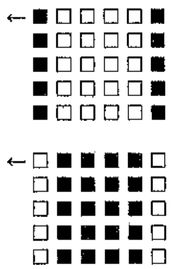
$$\frac{10\times28!+40\times28!}{30!}=\frac{50\times28!}{30!}=\frac{50}{30\cdot29}=\frac{5}{87}$$

別解　A さんの座り方は全部で　30 通り

[1]　A さんの座り方は 10 通りで，A さんが座った席以外の 29 通りのうち，B さんが座る隣の席は 1 通りであるから　$\frac{10}{30}\times\frac{1}{29}=\frac{1}{87}$

[2]　A さんの座り方は 20 通りで，A さんが座った席以外の 29 通りのうち，B さんが座る隣の席は 2 通りであるから　$\frac{20}{30}\times\frac{2}{29}=\frac{4}{87}$

[1]，[2] から，求める確率は　$\frac{1}{87}+\frac{4}{87}=\frac{5}{87}$



「■」の席に A さんが座る。

6.

思考のカギ

作図の問題は，平面図形のいろいろな性質や定理が基礎になっている。線分の比などを利用してどのような長さを求めることができるのか，しっかりと確認しよう。

解答

(1) BC∥ED であるから　AB : BE = AC : CD

すなわち　a : BE = 1 : b

よって　BE = ab

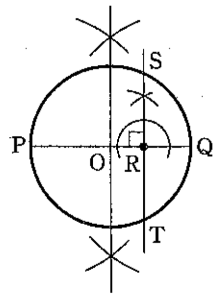
(2) ①　線分 PQ の垂直二等分線と PQ の交点を O とし，O を中心として半径 OP の円をかく。

②　点 R を通り PQ に垂直な直線を引き，円 O との交点を S，T とする。

このとき，方べきの定理により　RP・RQ = RS・RT

RP = a，RQ = ab，RS = RT であるから　$RS^2=a^2b$

よって，線分 RS は長さ $a\sqrt{b}$ の線分である。



別解　①　線分 PR 上に，RQ′ = ab となる点 Q′ をとる。

②　線分 PQ′ の垂直二等分線と PQ′ の交点を O とし，O を中心として半径 OP の円をかく。

③　線分 OR の垂直二等分線と OR の交点を O′ とし，O′ を中心として半径 O′O の円をかき，円 O との交点の 1 つを S とする。

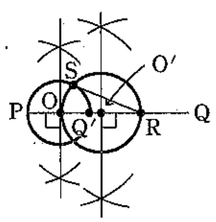
このとき，点 S は OR を直径とする円周上にあるから

$$\angle OSR=90^\circ$$

よって，方べきの定理により　$RS^2=RQ'\cdot RP$

RQ′ = ab，RP = a であるから　$RS^2=a^2b$

したがって，線分 RS は長さ $a\sqrt{b}$ の線分である。



正答のポイント

(1) 平行線と線分の比を根拠として，結果を正しく導いていること。また，△ABC∽△AED を根拠としているものも可とする。

(2) 次の 2 点を満たして記述していること。

①　与えられた図から長さ $a\sqrt{b}$ の線分を作図するために必要な図形 (円や垂直二等分線など) の作図手順を正確に示している。

②　方べきの定理などを根拠として，作図の手順を示した線分の長さが $a\sqrt{b}$ であることを確認している。

7.

思考のカギ

個々の電灯は点灯しているか，消灯しているかの 2 種類の状態しかない。これを数字で置き換えると，どのような規則が現れるだろうか。

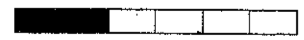
解答

(1) 点灯している状態を 1，消灯している状態を 0 でおきかえると，スイッチを n 回押したときの状態は，n を 2 進法で表したときの表示を表す。

← $1=1_{(2)}$，$2=10_{(2)}$，$3=11_{(2)}$，$4=100_{(2)}$，$5=101_{(2)}$，$6=110_{(2)}$，$7=111_{(2)}$，$8=1000_{(2)}$，……

 は 100101 を表すから，2 進数 $100101_{(2)}$ を 10 進法で表すと　$2^5+2^2+2^0=32+4+1=37$

よって，最初の状態からスイッチを 37 回押すとこの状態になる。

(2) 48 を 2 進法で表すと $48=32+16=2^5+2^4=110000_{(2)}$ であるから，最初の状態から 48 回スイッチを押したときの状態は 

(3) 60 を 2 進法で表すと　$60=32+16+8+4=2^5+2^4+2^3+2^2=111100_{(2)}$

□□□□10 という並びの 4 つの □ の中に 0 と 1 を入れる場合の数について考えればよい。　← 重複順列。

ただし，$111110_{(2)}=62$ は 60 より大きいから，すべてに 1 が入る場合を除く。

よって，求める場合の数は　$2^4-1=15$ (通り)

したがって，最初の状態から 60 回スイッチを押すとき，右から 1 番目が消灯し，2 番目が点灯している状態になるのは 15 回ある。

(2)

	余り
2) 48	
2) 24	… 0
2) 12	… 0
2) 6	… 0
2) 3	… 0
2) 1	… 1
0	… 1

(3)

	余り
2) 60	
2) 30	… 0
2) 15	… 0
2) 7	… 1
2) 3	… 1
2) 1	… 1
0	… 1