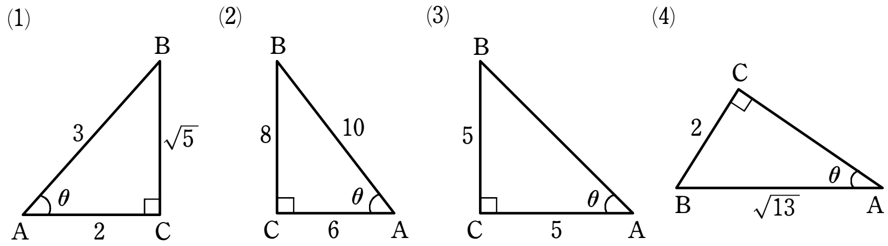
$\boxed{1}$

下の図において，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を，それぞれ求めよ。

(1)　(2)　(3)　(4)



解説

(1)　$\sin\theta=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，$\cos\theta=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{2}{3}$，$\tan\theta=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

(2)　$\sin\theta=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{8}{10}=\dfrac{4}{5}$，$\cos\theta=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$，$\tan\theta=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{8}{6}=\dfrac{4}{3}$

(3)　$AB=\sqrt{5^2+5^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$ であるから

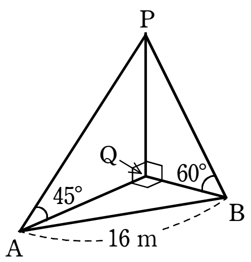
$\sin\theta=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{5}{5\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\cos\theta=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{5}{5\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\tan\theta=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{5}{5}=1$

(4)　$AC=\sqrt{(\sqrt{13})^2-2^2}=\sqrt{9}=3$ であるから

$\sin\theta=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$，$\cos\theta=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$，$\tan\theta=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{2}{3}$

$\boxed{2}$

ある木の真西の地点 A，真南の地点 B から木の先端 P を見上げた角度は，それぞれ 45°，60° であった。また，A，B 間の距離は 16 m であった。この木の高さ PQ を求めよ。ただし，目の高さは無視する。



解説

$PQ=x$ (m) とする。

$\tan 45^\circ=\dfrac{x}{AQ}$ から　　$AQ=\dfrac{x}{\tan 45^\circ}=x$

$\tan 60^\circ=\dfrac{x}{BQ}$ から　　$BQ=\dfrac{x}{\tan 60^\circ}=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$

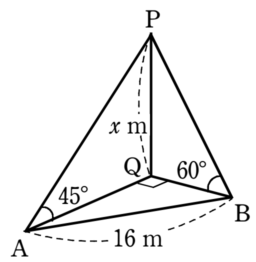
△ABQ は直角三角形であるから

$$x^2+\left(\dfrac{x}{\sqrt{3}}\right)^2=16^2$$

よって　　$x^2=192$

$x>0$ であるから　　$x=8\sqrt{3}$

したがって，木の高さは　　$8\sqrt{3}$ m



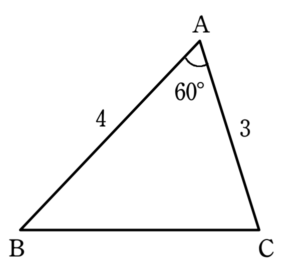
$\boxed{3}$

$A=60^\circ$，$AB=4$，$CA=3$ である △ABC について，次のものを求めよ。

(1)　面積 S

(2)　辺 BC の長さ

(3)　頂点 A から辺 BC に下ろした垂線 AH の長さ



解説

(1)　$S=\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 4\cdot\sin 60^\circ=\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 4\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$

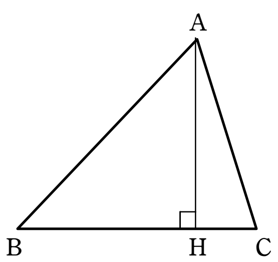
(2)　余弦定理により　　$BC^2=3^2+4^2-2\cdot 3\cdot 4\cdot\cos 60^\circ=9+16-2\cdot 3\cdot 4\cdot\dfrac{1}{2}=13$

$BC>0$ であるから　　$BC=\sqrt{13}$

(3)　$S=\dfrac{1}{2}\cdot BC\cdot AH$ でもあるから

$$3\sqrt{3}=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{13}\cdot AH$$

よって　　$AH=\dfrac{6\sqrt{39}}{13}$



$\boxed{4}$

円に内接する四角形 ABCD があり，$AB=2$，$BC=4$，$CD=3$，$DA=2$ である。
次のものを求めよ。

(1)　対角線 AC の長さ　　　　(2)　四角形 ABCD の面積 S

解説

(1)　△ABC に余弦定理を使うと

$AC^2=2^2+4^2-2\cdot 2\cdot 4\cdot\cos B$

$=20-16\cos B$　……①

また，四角形 ABCD は円に内接するから

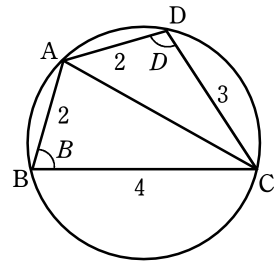
$D+B=180^\circ$

よって　　$D=180^\circ-B$

△ACD に余弦定理を使うと

$AC^2=2^2+3^2-2\cdot 2\cdot 3\cdot\cos(180^\circ-B)$

$=13+12\cos B$　……②



①，② から　　$20-16\cos B=13+12\cos B$　　　整理すると　　$28\cos B=7$

よって　　$\cos B=\dfrac{1}{4}$

したがって，① から　　$AC^2=20-16\cos B=20-16\cdot\dfrac{1}{4}=16$

$AC>0$ であるから　　$AC=4$

(2)　$\sin B>0$ であるから　　$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

したがって　　$S=\triangle ABC+\triangle ACD$

$=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 4\sin B+\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 3\sin(180^\circ-B)$

$=4\sin B+3\sin B$

$=7\sin B$

$=\dfrac{7\sqrt{15}}{4}$

$\boxed{5}$

△ABC において，$AB=4$，$BC=6$，$CA=\dfrac{10}{3}$ とする。このとき，

$\cos\angle BAC=\dfrac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウ}}$，$\sin\angle BAC=\dfrac{\boxed{エ}\sqrt{\boxed{オ}}}{\boxed{カ}}$ である。

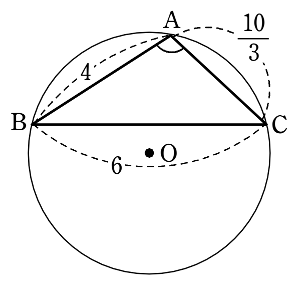
また，△ABC の面積は $\dfrac{\boxed{キク}\sqrt{\boxed{ケ}}}{\boxed{コ}}$，△ABC の外接円の中心を O とすると，外接円 O の半径は $\dfrac{\boxed{サ}\sqrt{\boxed{シ}}}{\boxed{ス}}$ である。

解説

余弦定理により

$$\cos\angle BAC=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}$$

$$=\dfrac{4^2+\left(\dfrac{10}{3}\right)^2-6^2}{2\cdot 4\cdot\dfrac{10}{3}}=\dfrac{^{アイ}-1}{^{ウ}3}$$



$\sin^2\angle BAC=1-\cos^2\angle BAC$ より

$$\sin^2\angle BAC=1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{8}{9}$$

$\sin\angle BAC>0$ より　　$\sin\angle BAC=\sqrt{\dfrac{8}{9}}=\dfrac{^{エ}2\sqrt{^{オ}2}}{^{カ}3}$

△ABC の面積は　　$\dfrac{1}{2}AB\cdot AC\sin\angle BAC=\dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot\dfrac{10}{3}\cdot\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=\dfrac{^{キク}40\sqrt{^{ケ}2}}{^{コ}9}$

外接円の半径を R とすると，正弦定理により

$2R=\dfrac{BC}{\sin\angle BAC}$　　　よって　　$R=\dfrac{6}{2\cdot\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}=\dfrac{^{サ}9\sqrt{^{シ}2}}{^{ス}4}$