

1. 次の2次関数のグラフの軸の方程式と、頂点の座標を求めよ。

(1) $y = x^2 - 2x - 1$
 $= (x-1)^2 - 1 - 1$
 $= (x-1)^2 - 2$
 軸: $x=1$, 頂点 $(1, -2)$

(2) $y = x^2 + 10x + 16$
 $= (x+5)^2 - 25 + 16$
 $= (x+5)^2 - 9$
 軸: $x=-5$, 頂点 $(-5, -9)$

(3) $y = x^2 + 5x + 1$
 $= (x + \frac{5}{2})^2 - \frac{25}{4} + 1$
 $= (x + \frac{5}{2})^2 - \frac{21}{4}$
 軸: $x = -\frac{5}{2}$, 頂点 $(-\frac{5}{2}, -\frac{21}{4})$

(4) $y = x^2 - x$
 $= (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$
 軸: $x = \frac{1}{2}$, 頂点 $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$

(5) $y = 2x^2 + 8x + 3$
 $= 2(x^2 + 4x) + 3$
 $= 2(x+2)^2 - 8 + 3$
 $= 2(x+2)^2 - 5$
 軸: $x = -2$, 頂点 $(-2, -5)$

(6) $y = 3x^2 - 6x$
 $= 3(x^2 - 2x)$
 $= 3(x-1)^2 - 3$
 軸: $x = 1$, 頂点 $(1, -3)$

(7) $y = 2x^2 - 2x + 1$
 $= 2(x^2 - x) + 1$
 $= 2(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} + 1$
 $= 2(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2}$
 軸: $x = \frac{1}{2}$, 頂点 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

(8) $y = 3x^2 - x + 2$
 $= 3(x^2 - \frac{1}{3}x) + 2$
 $= 3(x - \frac{1}{6})^2 + \frac{23}{12}$
 軸: $x = \frac{1}{6}$, 頂点 $(\frac{1}{6}, \frac{23}{12})$

(9) $y = -x^2 - 4x - 1$
 $= -(x^2 + 4x) - 1$
 $= -(x+2)^2 + 4 - 1$
 $= -(x+2)^2 + 3$
 軸: $x = -2$, 頂点 $(-2, 3)$

(10) $y = -2x^2 + 4x + 1$
 $= -2(x^2 - 2x) + 1$
 $= -2(x-1)^2 + 3$
 軸: $x = 1$, 頂点 $(1, 3)$

(11) $y = -\frac{1}{2}x^2 - x - 1$
 $= -\frac{1}{2}(x^2 + 2x) - 1$
 $= -\frac{1}{2}(x+1)^2 - \frac{1}{2}$
 軸: $x = -1$, 頂点 $(-1, -\frac{1}{2})$

(12) $y = 2x^2 - 5x$
 $= 2(x^2 - \frac{5}{2}x)$
 $= 2(x - \frac{5}{4})^2 - \frac{25}{8}$
 軸: $x = \frac{5}{4}$, 頂点 $(\frac{5}{4}, -\frac{25}{8})$

(13) $y = -2x^2 + x + 3$
 $= -2(x^2 - \frac{1}{2}x) + 3$
 $= -2(x - \frac{1}{4})^2 + \frac{25}{8}$
 軸: $x = \frac{1}{4}$, 頂点 $(\frac{1}{4}, \frac{25}{8})$

(14) $y = -x^2 - x + 2$
 $= -(x^2 + x) + 2$
 $= -(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{9}{4}$
 軸: $x = -\frac{1}{2}$, 頂点 $(-\frac{1}{2}, \frac{9}{4})$

(15) $y = \frac{1}{3}x^2 - 4x + 1$
 $= \frac{1}{3}(x^2 - 12x) + 1$
 $= \frac{1}{3}(x-6)^2 - 11$
 軸: $x = 6$, 頂点 $(6, -11)$

(16) $y = -4x^2 - 6x - 3$
 $= -4(x^2 + \frac{3}{2}x) - 3$
 $= -4(x + \frac{3}{4})^2 - \frac{3}{4}$
 軸: $x = -\frac{3}{4}$, 頂点 $(-\frac{3}{4}, -\frac{3}{4})$

2. 次の問いに答えよ。

(1) 放物線 $y = x^2 + 6x + 2$ を x 軸方向に 4, y 軸方向に 5 だけ平行移動して得られる放物線の方程式を求めよ。

$y = (x+3)^2 - 7$
 頂点 $(-3, -7)$
 \downarrow x 軸方向に 4, y 軸方向に 5
 よして $y = (x-1)^2 - 2$
 $= x^2 - 2x - 1$
 頂点 $(1, -2)$

(2) 放物線 $y = -2x^2 + 4x - 3$ を x 軸方向に -3, y 軸方向に 2 だけ平行移動して得られる放物線の方程式を求めよ。

$x \pm x+3, y \pm y-2$ に置きかえて,
 $y-2 = -2(x+3)^2 + 4(x+3) - 3$
 $= -2x^2 - 8x - 9$
 $\rightarrow y = -2x^2 - 8x - 9$

(3) 放物線 $y = -x^2 + 4x + 1$ のグラフをどのように平行移動すれば、放物線 $y = -x^2 - 2x$ のグラフが得られるか。

$y = -(x-2)^2 + 5$
 頂点 $(2, 5)$
 $y = -(x+1)^2 + 1$
 頂点 $(-1, 1)$
 $\left. \begin{array}{l} x \text{ 軸方向に } -3, y \text{ 軸方向に } -4 \\ \text{だけ平行移動} \end{array} \right\}$
 x 軸方向に -3 , y 軸方向に -4

(4) 放物線 $y = x^2 - x + 1$ のグラフをどのように平行移動すれば、放物線 $y = x^2 + 3x - 2$ のグラフが得られるか。

$y = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$
 頂点 $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$
 $y = (x + \frac{3}{2})^2 - \frac{17}{4}$
 頂点 $(-\frac{3}{2}, -\frac{17}{4})$
 $\left. \begin{array}{l} x \text{ 軸方向に } -2, y \text{ 軸方向に } -5 \\ \text{だけ平行移動} \end{array} \right\}$
 x 軸方向に -2 , y 軸方向に -5

3. x 軸方向に 2, y 軸方向に -1 だけ平行移動すると放物線 $y = -2x^2 + 4x + 3$ に重なるような放物線の方程式を求めよ。

\parallel
 \uparrow x 軸方向に -2, y 軸方向に 1
 $y = -2(x^2 - 2x) + 3$
 $= -2(x-1)^2 + 5$
 頂点 $(1, 5)$
 よして 頂点は $(-1, 6)$ なので,
 $y = -2(x+1)^2 + 6$
 $= -2x^2 - 4x + 4$

4. 次の問いに答えよ。

(1) 放物線 $y=x^2-10x+5$ を、次のものに関して対称移動した放物線の方程式を求めよ。

① x軸

頂点、(5, 30) より。

$$y = -(x-5)^2 + 30$$

$$\rightarrow y = -x^2 + 10x + 5$$

② y軸

頂点、(-5, -30) より。

$$y = (x+5)^2 - 30$$

$$= x^2 + 10x - 5$$

③ 原点

頂点、(-5, 30) より。

$$y = -(x+5)^2 + 30$$

$$= -x^2 - 10x + 5$$

$$y = (x-5)^2 - 30$$

頂点、(5, -30)

(2) 放物線 $y=-3x^2-12x+2$ を、次のものに関して対称移動した放物線の方程式を求めよ。

① x軸

$\rightarrow y$ を $-y$ に置きかえる

$$-y = -3x^2 - 12x + 2$$

$$\rightarrow y = 3x^2 + 12x - 2$$

② y軸

$\rightarrow x$ を $-x$ に置きかえる

$$y = -3(-x)^2 - 12(-x) + 2$$

$$= -3x^2 + 12x + 2$$

③ 原点

$\rightarrow x$ を $-x$, y を $-y$ に置きかえる。

$$-y = -3(-x)^2 - 12(-x) + 2$$

$$\rightarrow y = 3x^2 - 12x - 2$$

(3) 放物線 $y=\frac{1}{2}x^2-x+2$ を、次のものに関して対称移動した放物線の方程式を求めよ。

① x軸

頂点、(1, - $\frac{3}{2}$) より。

$$y = -\frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{3}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 + x - 2$$

② y軸

頂点、(-1, $\frac{3}{2}$) より。

$$y = \frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{3}{2}$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + x + 2$$

③ 原点

頂点、(-1, - $\frac{3}{2}$) より。

$$y = -\frac{1}{2}(x+1)^2 - \frac{3}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 - x - 2$$

$$y = \frac{1}{2}(x^2 - 2x) + 2$$

$$= \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{3}{2}$$

頂点、(1, $\frac{3}{2}$)

5. 放物線 $y=-x^2+2x-2$... ① を原点に関して対称に移動し、さらにx軸に関して対称に移動して得られる放物線 ② の方程式は $y=\square$ ア であり、② は ① を \square イ に関して対称に移動した放物線である。

$$y = -(x-1)^2 - 1$$

頂点、(1, -1)

↓ 原点対称



↓ x軸対称

頂点、(-1, -1)

y軸対称

よて、

$$y = -(x+1)^2 - 1$$

$$= -x^2 - 2x - 2$$

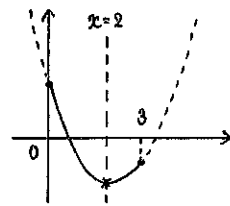
ア: $y = -x^2 - 2x - 2$, イ: y軸

6. 次の2次関数の最大値、最小値を求めなさい。

(1) $y=x^2-4x+2$ ($0 \leq x \leq 3$)

$$= (x-2)^2 - 2$$

軸: $x=2$, 頂点、(2, -2)

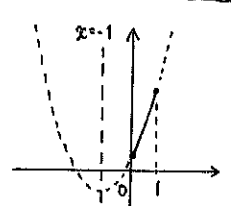


最大値: 2 (x=0), 最小値: -2 (x=2)

(2) $y=2x^2+4x+3$ ($0 \leq x \leq 1$)

$$= 2(x+1)^2 + 1$$

軸: $x=-1$, 頂点、(-1, 1)

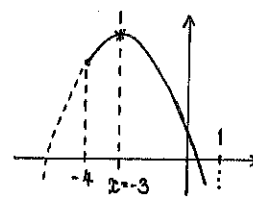


最大値: 9 (x=1), 最小値: 3 (x=0)

(3) $y=-x^2-6x+1$ ($-4 \leq x \leq 1$)

$$= -(x+3)^2 + 10$$

軸: $x=-3$, 頂点、(-3, 10)

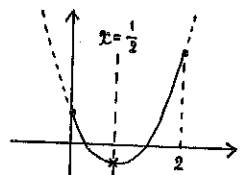


最大値: 10 (x=-3), 最小値: -6 (x=1)

(4) $y=x^2-x+1$ ($0 \leq x \leq 2$)

$$= (x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$$

軸: $x=\frac{1}{2}$, 頂点、($\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$)

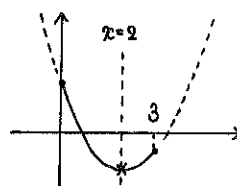


最大値: 3 (x=2), 最小値: $\frac{3}{4}$ (x= $\frac{1}{2}$)

(5) $y=\frac{1}{2}x^2-2x+1$ ($0 \leq x \leq 3$)

$$= \frac{1}{2}(x-2)^2 - 1$$

軸: $x=2$, 頂点、(2, -1)

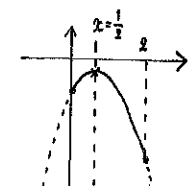


最大値: 1 (x=0), 最小値: -1 (x=2)

(6) $y=-3x^2+3x-2$ ($0 \leq x \leq 2$)

$$= -3(x-\frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4}$$

軸: $x=\frac{1}{2}$, 頂点、($\frac{1}{2}$, - $\frac{5}{4}$)



最大値: - $\frac{5}{4}$ (x= $\frac{1}{2}$), 最小値: -8 (x=2)

7. 関数 $y=-2x^2+12x+c$ ($-2 \leq x \leq 2$) の最大値が7となるように、定数cの値を定めよ。また、そのときの最小値を求めよ。

$$y = -2(x-3)^2 + c$$

$$= -2(x-3)^2 + 18 + c$$

軸: $x=3$, 頂点、(3, 18+c)

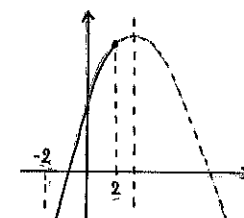
$x=2$ のとき最大をとるので、

$$-8 + 24 + c = 7$$

$$\rightarrow c = -9$$

よて、

最小値 -41 (x=-2)



8. 次の2次関数のグラフの軸の方程式と、頂点の座標を求めよ。ただし、 a は実数の定数とする。

(1) $y = x^2 - 2(a-1)x + a^2 + 1$

$$= \left\{ x - \underbrace{(a-1)}_{\substack{\downarrow \times \frac{1}{2} \\ \text{2乗して3!}} \right\}^2 - (a-1)^2 + a^2 + 1$$

$$= \left\{ x - (a-1) \right\}^2 + 2a$$

軸: $x = a-1$, 頂点: $(a-1, 2a)$

(2) $y = -2x^2 + 2(a+1)x - a + 1$

$$= -2 \left\{ x^2 - (a+1)x \right\} - a + 1$$

$$= -2 \left\{ x - \frac{a+1}{2} \right\}^2 + \frac{(a+1)^2}{2} - a + 1$$

$$= -2 \left(x - \frac{a+1}{2} \right)^2 + \frac{a^2+3}{2}$$

軸: $x = \frac{a+1}{2}$, 頂点: $\left(\frac{a+1}{2}, \frac{a^2+3}{2} \right)$

9. 次の問いに答えよ。

(1) 放物線 $y = ax^2 + bx + c$ を x 軸方向に -3 , y 軸方向に 1 だけ平行移動した後、原点に関して対称移動したものが、 $y = x^2 - 6x - 4$ になった。定数 a, b, c の値を求めよ。

$$y = x^2 - 6x - 4$$

$$= (x-3)^2 - 13$$

頂点: $(3, -13)$

↓ 原点对称

頂点: $(-3, 13)$

↓ x 軸方向に 3
↓ y 軸方向に 1

頂点: $(0, 12)$

よして,

$$y = -(x-0)^2 + 12$$

$$= -x^2 + 12$$

$a = -1, b = 0, c = 12$

(2) 放物線 $y = ax^2 + bx + c$ を y 軸に関して対称移動した後、 x 軸方向に 4 , y 軸方向に -3 だけ平行移動したものが、 $y = -x^2 + 3x - 4$ になった。定数 a, b, c の値を求めよ。

$$y = -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{7}{4}$$

頂点: $\left(\frac{3}{2}, -\frac{7}{4}\right)$

↓ x 軸方向に -4
↓ y 軸方向に 3

頂点: $\left(-\frac{5}{2}, \frac{5}{4}\right)$

↓ y 軸対称

頂点: $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{4}\right)$

よして,

$$y = -\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}$$

$$= -x^2 + 5x - 5$$

$a = -1, b = 5, c = -5$

10. 次の問いに答えよ。

(1) 2次関数 $y = ax^2 + 2x + a + 1$ が、最大値 1 をとるように定数 a の値を定めよ。

最大値 1 をとるので、 $a < 0$

$$y = a\left(x + \frac{2}{a}x\right) + a + 1$$

よして,

$$= a\left(x + \frac{1}{a}\right)^2 - \frac{1}{a} + a + 1$$

$$- \frac{1}{a} + a + 1 = 1$$

$$\Leftrightarrow a = \pm 1$$

頂点: $\left(-\frac{1}{a}, -\frac{1}{a} + a + 1\right)$

$a < 0$ なので、 $a = -1$

(2) 2次関数 $y = ax^2 - 4x + 2a$ が、最小値 2 をとるように定数 a の値を定めよ。

最小値 2 をとるので、 $a > 0$

よして,

$$y = a\left(x^2 - \frac{4}{a}x\right) + 2a$$

$$-\frac{4}{a} + 2a = 2$$

$$= a\left(x - \frac{2}{a}\right)^2 - \frac{4}{a} + 2a$$

$$\Leftrightarrow a^2 - a - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-2)(a+1) = 0$$

頂点: $\left(\frac{2}{a}, -\frac{4}{a} + 2a\right)$

$a > 0$ なので、 $a = -1$

11. 次の問いに答えよ。

(1) $a < 0$ とする。関数 $y = ax^2 - 4ax + b$ ($-1 \leq x \leq 3$) の最大値が 7 , 最小値が -2 のとき、定数 a, b の値を求めよ。

$$y = a(x^2 - 4x) + b$$

$x = 2$ のとき、最大なので,

$$= a(x-2)^2 - 4a + b$$

$$-4a + b = 7 \quad \dots \textcircled{1}$$

軸: $x = 2$, 頂点: $(2, -4a + b)$

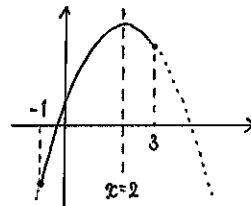
$x = -1$ のとき最小なので,

$a < 0$ なので,

$$5a + b = -2 \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ② より,

$a = -1, b = 3$



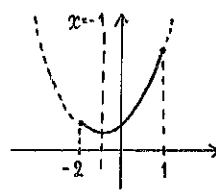
(2) 関数 $y = ax^2 + 2ax + b$ ($-2 \leq x \leq 1$) の最大値が 11 , 最小値が 3 のとき、定数 a, b の値を求めよ。

$$y = a(x+1)^2 - a + b$$

軸: $x = -1$, 頂点: $(-1, -a + b)$

[1] $a > 0$ のとき,

[2] $a < 0$ のとき,



$x = 1$ のとき最大なので,

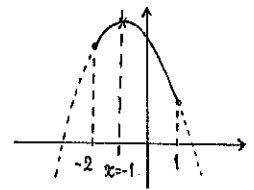
$$3a + b = 11 \quad \dots \textcircled{1}$$

$x = -1$ のとき最小なので,

$$-a + b = 3 \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ② より,

$a = 2, b = 5$



$x = -1$ のとき最大なので,

$$-a + b = 11 \quad \dots \textcircled{1}$$

$x = 1$ のとき最小なので,

$$3a + b = 3 \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ② より,

$a = -2, b = 9$