平面ベクトル　演習1

$\boxed{1}$ 次の等式を満たす $\vec{x}$ を，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。　[6点×3＝18点]

(1)　$\vec{x}+\vec{a}=\vec{b}$　　　(2)　$2(\vec{x}+\vec{b})=\vec{a}$　　　(3)　$2(\vec{a}-\vec{x})=\vec{x}-3\vec{b}$

解答　(1)　$\vec{x}=-\vec{a}+\vec{b}$

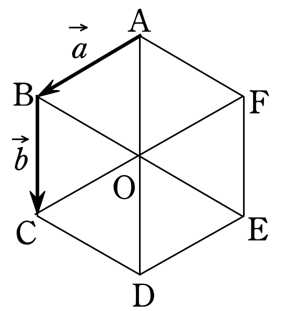
(2)　$2\vec{x}+2\vec{b}=\vec{a}$ より　　$2\vec{x}=\vec{a}-2\vec{b}$　　よって　　$\vec{x}=\dfrac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}$

(3)　$2\vec{a}-2\vec{x}=\vec{x}-3\vec{b}$ より　　$3\vec{x}=2\vec{a}+3\vec{b}$　　よって　　$\vec{x}=\dfrac{2}{3}\vec{a}+\vec{b}$

$\boxed{2}$ 正六角形 ABCDEF において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{b}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

[9点×2＝18点]

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{BE}}$　　　(2)　$\overrightarrow{\mathrm{BD}}$



解答　(1)　$\overrightarrow{\mathrm{BE}}=2\overrightarrow{\mathrm{BO}}=2(\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{AO}})$

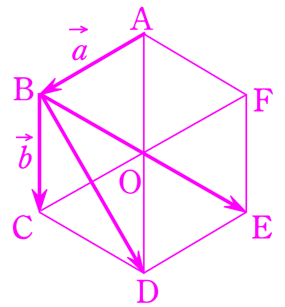
$=2(-\vec{a}+\vec{b})$

$=-2\vec{a}+2\vec{b}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\overrightarrow{\mathrm{BE}}+\overrightarrow{\mathrm{ED}}$

$=(-2\vec{a}+2\vec{b})+\vec{a}$

$=-\vec{a}+2\vec{b}$



$\boxed{3}$ 2 つのベクトル $\vec{a}=(x,\ 1)$，$\vec{b}=(4,\ x)$ が平行になるように，x の値を定めよ。　[12点]

解答　$\vec{a}/\!/\vec{b}$ であるには，$\vec{b}=k\vec{a}$ となる実数 k があればよい。

$(4,\ x)=(kx,\ k)$ から

$4=kx$　…… ①，　　$x=k$　…… ②

② を ① に代入して　$x^2=4$　すなわち　$x=\pm 2$

平面ベクトル　演習2

$\boxed{4}$ $|\vec{a}|=2\sqrt{2}$，$|\vec{b}|=3$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 135° であるとき，次の値を求めよ。

[8点×4＝32点]

(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}$　　(2)　$\vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b})$

(3)　$|\vec{a}-\vec{b}|$　　(4)　$|\vec{a}+2\vec{b}|$

解答　(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 135^\circ=2\sqrt{2}\times3\times\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=-6$

(2)　$\vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=(2\sqrt{2})^2-(-6)=14$

(3)　$|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=(2\sqrt{2})^2-2\times(-6)+3^2=29$

$|\vec{a}-\vec{b}|\geqq0$ であるから　$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{29}$

(4)　$|\vec{a}+2\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2=(2\sqrt{2})^2+4\times(-6)+4\times3^2=20$

$|\vec{a}+2\vec{b}|\geqq0$ であるから　$|\vec{a}+2\vec{b}|=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

$\boxed{5}$ $|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=3$，$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{13}$ のとき，次のものを求めよ。　[10点×2＝20点]

(1)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$　　(2)　$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ

解答　(1)　$|\vec{a}-\vec{b}|^2=13$ であるから

$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=13$

よって　$1^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+3^2=13$

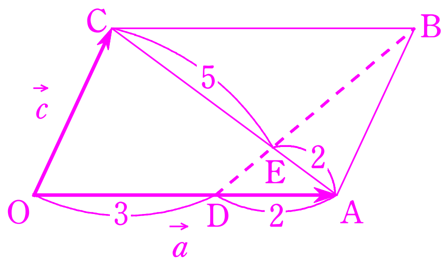
したがって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{3}{2}$

(2)　$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ は　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-\frac{3}{2}}{1\times3}=-\dfrac{1}{2}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから　$\theta=120^\circ$

平面ベクトル　演習3

$\boxed{6}$ 平行四辺形 OABC において，辺 OA を 3 : 2 に内分する点を D，対角線 AC を 2 : 5 に内分する点を E とする。このとき，3 点 D，E，B は一直線上にあることを証明せよ。また，DE : EB を求めよ。　[25点]



解答　$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。

$$\overrightarrow{OB}=\vec{a}+\vec{c},\quad \overrightarrow{OD}=\frac{3}{5}\overrightarrow{OA}=\frac{3}{5}\vec{a}$$

また，AE : EC = 2 : 5 であるから

$$\overrightarrow{OE}=\frac{5\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OC}}{2+5}=\frac{5\vec{a}+2\vec{c}}{7}$$

よって

$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OD}=\frac{5\vec{a}+2\vec{c}}{7}-\frac{3}{5}\vec{a}=\frac{2}{35}(2\vec{a}+5\vec{c})$$

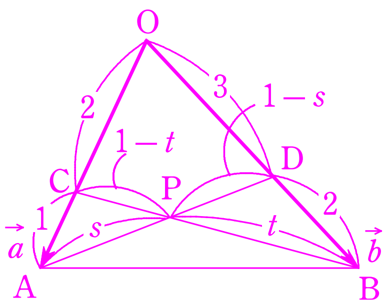
$$\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OD}=\vec{a}+\vec{c}-\frac{3}{5}\vec{a}=\frac{1}{5}(2\vec{a}+5\vec{c})$$

これより　$\overrightarrow{DB}=\dfrac{7}{2}\overrightarrow{DE}$

したがって，3 点 D，E，B は一直線上にある。

また，DB : DE = 7 : 2 であるから　DE : EB = 2 : 5

$\boxed{7}$ △OAB において，辺 OA を 2 : 1 に内分する点を C，辺 OB を 3 : 2 に内分する点を D とし，線分 BC と線分 AD の交点を P とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。　[25点]



解答　AP : PD = s : $(1-s)$ とすると

$$\overrightarrow{OP}=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OD}=(1-s)\vec{a}+\frac{3}{5}s\vec{b}\quad \cdots\cdots ①$$

BP : PC = t : $(1-t)$ とすると

$$\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OC}+(1-t)\overrightarrow{OB}=\frac{2}{3}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}\quad \cdots\cdots ②$$

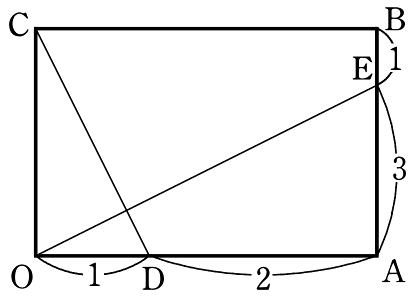
$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でないから，

$\overrightarrow{OP}$ の $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いた表し方はただ 1 通りである。

①，② から　$1-s=\dfrac{2}{3}t$，$\dfrac{3}{5}s=1-t$

これを解くと　$s=\dfrac{5}{9}$，$t=\dfrac{2}{3}$　　よって　$\overrightarrow{OP}=\dfrac{4}{9}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}$

$\boxed{8}$ $\mathrm{OA}=3$，$\mathrm{OC}=2$ である長方形 OABC がある。辺 OA を $1:2$ に内分する点を D，辺 AB を $3:1$ に内分する点を E とすると，$\mathrm{CD}\perp\mathrm{OE}$ である。このことを，ベクトルを用いて証明せよ。　[25点]



証明　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{1}{3}\vec{a}-\vec{c},\quad \overrightarrow{\mathrm{OE}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{c}$$

ここで　$\overrightarrow{\mathrm{CD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\left(\frac{1}{3}\vec{a}-\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{c}\right)=\frac{1}{3}|\vec{a}|^2+\frac{1}{4}\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{c}\cdot\vec{a}-\frac{3}{4}|\vec{c}|^2$

$$=\frac{1}{3}|\vec{a}|^2-\frac{3}{4}\vec{a}\cdot\vec{c}-\frac{3}{4}|\vec{c}|^2$$

$|\vec{a}|=3$，$|\vec{c}|=2$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=0$ より　$\overrightarrow{\mathrm{CD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{1}{3}\times3^2-\frac{3}{4}\times0-\frac{3}{4}\times2^2=0$

$\overrightarrow{\mathrm{CD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OE}}=0$ より $\overrightarrow{\mathrm{CD}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ となるから，$\mathrm{CD}\perp\mathrm{OE}$ である。　終

$\boxed{9}$ $\triangle\mathrm{OAB}$ において，次の式を満たす点 P の存在範囲を求めよ。

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}},\quad s+t=\frac{3}{2},\quad s\geqq0,\quad t\geqq0$$　[25点]

解答　$s+t=\frac{3}{2}$ から　　$\frac{2}{3}s+\frac{2}{3}t=1$

ここで，$\frac{2}{3}s=s'$，$\frac{2}{3}t=t'$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{2}{3}s\left(\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)+\frac{2}{3}t\left(\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)=s'\left(\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)+t'\left(\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$$

$$s'+t'=1,\quad s'\geqq0,\quad t'\geqq0$$

よって，$\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$，$\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$

となる点 A′，B′ をとると

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s'\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+t'\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$，$s'+t'=1$，

$s'\geqq0$，$t'\geqq0$

したがって，点 P の存在範囲は線分 A′B′ である。