1．次の式を満たす実数 x，y を求めよ。

(1) $(5+3i)x+(2-i)y=8+7i$　　(2) $\dfrac{12+yi}{3-2i}=x+3i$

2．次の複素数の絶対値を求めよ。

(1) $(5-i)(2+3i)$　　(2) $\dfrac{3-\sqrt{2}\,i}{3+\sqrt{2}\,i}$

3．a，b を実数とするとき，複素数 $z=a+bi$ について，次のことを示せ。

(1) $z=\overline{z}$ は，z が実数であることの必要十分条件であり，$z+\overline{z}=0$ は，z が 0 または純虚数であることの必要十分条件である。

(2) $\dfrac{z+\overline{z}}{2}$ は z の実部であり，$\dfrac{z-\overline{z}}{2i}$ は z の虚部である。

(3) $|z|=1$ であることは，$\overline{z}=\dfrac{1}{z}$ であることと同値である。

4．次の複素数を極形式で表せ。ただし，偏角 θ の範囲は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。

(1) $-1+i$　　(2) $-2i$　　(3) $\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{1+i}$

5．次の計算をせよ。

(1) $\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)^5$　　(2) $(1-i)^7$　　(3) $\left(\dfrac{3-\sqrt{3}\,i}{2}\right)^8$

6．次の方程式を解け。

(1) $z^3=8i$　　(2) $z^4=\dfrac{1}{2}(-1+\sqrt{3}\,i)$

７．複素数平面上の３点 $z_1=1+2i$，$z_2=-2+5i$，$z_3=2-2i$ について，次のものを求めよ。

(1) ２点 z_1，z_2 の距離

(2) 線分 z_1z_2 を２：１の比に内分する点

(3) $\triangle z_1z_2z_3$ の重心

８．複素数平面上の点 z は，点 $\overline{z}$ とどんな位置関係にあるか。また，点 $-\overline{z}$ とはどんな位置関係にあるか。

９．複素数平面上の３点 $z_1=-3+2i$，$z_2=-5$，$z_3=-2+3i$ は，一直線上にあることを示せ。

10．複素数平面上で，次の方程式を満たす点 z はどのような図形を表すか。

(1) $|z-i|=2$

(2) $z+\overline{z}=4$

(3) $|z-1|=|z+3i|$

11．次の問いに答えよ。

(1) 複素数平面上の２点を z_1，z_2 とする。z_2 を z_1 のまわりに角 θ だけ回転した点はどんな式で表されるか。

(2) $1+2i$，3 の表す点をそれぞれ B，C とするとき，BC を１辺とする正三角形 ABC の頂点 A を表す複素数を求めよ。

12．$\dfrac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$ を計算することにより，複素数平面上の３点 z_1，z_2，z_3 の位置関係を調べよ。

(1) $z_1=-1$，$z_2=\dfrac{1-\sqrt{3}\,i}{2}$，$z_3=\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$

(2) $z_1=3+i$，$z_2=6-i$，$z_3=-3+5i$

13．複素数平面上の点 z が原点中心，半径２の円周上を動くとき，次の点はどのような図形を描くか。

(1) $w=z+1-i$

(2) $w=i(z+1-i)$

(3) $w=\dfrac{1+z}{z}$

～ challenge 問題～

1 複素数 $z=1+i$，$w=-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}i$ の絶対値 $\left|\frac{w}{z}\right|$ は $\boxed{\text{ア}}$ であり，$\frac{w}{z}$ の偏角 θ（$0\leqq\theta<2\pi$）は $\boxed{\text{イ}}$ である。

2 複素数 z が $|z|=1$ （ただし，$z\neq-1$）を満たすとする。0，z，$\frac{1}{z+1}$ が表す複素数平面上の点をそれぞれ，O，A，B とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $\frac{1}{z+1}$ の実部は $\frac{1}{2}$ であることを示せ。

(2) 2直線 OA，OB が垂直に交わるような z をすべて求めよ。

3 次の問いに答えよ。

(1) 複素数 $\frac{4i}{1+\sqrt{3}\,i}$ の偏角 θ を求めよ。ただし，偏角 θ は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。

(2) $\left(\frac{4i}{1+\sqrt{3}\,i}\right)^{13}$ を $x+yi$（x，y は実数，i は虚数単位）の形に表せ。

4 $z_1=2+2i$，$z_2=-1+3i$ とし，複素数平面上において $\mathrm{P}(z_1)$，$\mathrm{Q}(z_2)$ とする。また，原点を O とし，直線 OQ に関して点 P と対称な点を $\mathrm{R}(z_3)$ とおく。

(1) $\angle\mathrm{POQ}=\theta$（$0\leqq\theta<2\pi$）とおくとき，$\cos\theta+i\sin\theta$ を求めよ。

(2) z_3 を求めよ。

(3) 点 $\mathrm{S}(z)$ が直線 PR 上を動くとき，$\left|\frac{5}{2}z-5\right|$ の最小値を求めよ。

5 z を複素数とすると，方程式 $|z-2|=2|z+1|$ は複素数平面上で円を表す。この円の中心は，$z=\boxed{\text{ア}}$，半径は $\boxed{\text{イ}}$ である。

14．次の方程式を解け。

(1) $\dfrac{3x+2}{x-1}=x+2$　　(2) $\sqrt{x+3}=x-3$

15．２つの関数 $f(x)=2x+1$，$g(x)=\sqrt{x}$ について，次の問いに答えよ。

(1) 合成関数 $f(g(x))$，$g(f(x))$ をそれぞれ求めよ。

(2) $g(x)$ の逆関数 $g^{-1}(x)$ を求めよ。

16．３つの関数 $f(x)=x^2-6$ $(x\geqq 0)$，$g(x)=3^x$，$h(x)=\log_2(x-5)$ について，逆関数 $f^{-1}(x)$，$g^{-1}(x)$，$h^{-1}(x)$ をそれぞれ求めよ。

17．次の極限を調べよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(-n^3+4n^2)$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+5n+10}{2n^2+1}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}-n}$　　(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-4^n}{3^n+4^n}$

18．数列 $\left\{\dfrac{r^n}{3+r^n}\right\}$ の極限を，次の各場合について調べよ。

(1) $r<-1$　(2) $r=-1$　(3) $-1<r<1$　(4) $r=1$　(5) $r>1$

19．数列 $\left\{\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{2}\right\}$ の極限を求めよ。

20．次の無限級数の収束，発散を調べよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

21．次の無限等比級数の収束、発散を調べよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}3\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}2\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

(3) $(\sqrt{2}+1)+1+(\sqrt{2}-1)+\cdots$

22．ある数列によって，次の無限級数が与えられている。第 n 項を n の式で表せ。さらに，この無限級数の収束，発散を調べよ。

(1) $\dfrac{1}{1\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot5}+\dfrac{1}{5\cdot7}+\cdots$　　(2) $1+\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{7}+\cdots$

23．無限等比級数 $x+x(2-x)+x(2-x)^2+\cdots$ が収束するような定数 x の値の範囲を求めよ。また，そのときの和を $f(x)$ とおくとき，関数 $y=f(x)$ のグラフをかけ。

24．極限値 $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^2-6x+8}{2x^2-3x-2}$ を求めよ。

～ challenge 問題 ～

$\boxed{6}$ 次の不等式を解け。

(1) $\dfrac{x+6}{x} \leqq x$　　(2) $\sqrt{2x+3} < -x+1$

$\boxed{7}$ 次の問いに答えよ。

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+n+1}-2n\right)$ を求めよ。

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+\cdots+n}{n+2}-\frac{n}{2}\right)$ を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{an+b-\sqrt{3n^2+2n}}=5$ のとき，a，b の値を求めよ。

$\boxed{8}$ 次の問いに答えよ。

(1) 数列 $\{a_n\}$ が，$a_n=\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+\cdots+\dfrac{1}{1+2+3+\cdots+n}$ （$n=1$，2，3…）と定義されているとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

(2) $n=1$，2，3，… に対し，整式 x^n を $6x+4$ で割ったときの余りを a_n とおく。

① a_3 を求めよ。　　② $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ を求めよ。

$\boxed{9}$ 半径１の球を O_1 とし，球 O_1 に内接する立方体を B_1 とする。次に B_1 に内接する球を O_2 とし，球 O_2 に内接する立方体を B_2 とする。
以下この操作を繰り返してできる球を O_n，立方体を B_n（$n=3$，4，5，…）とする。

(1) 立方体 B_1 の１辺の長さ ℓ_1 を求めよ。　　(2) 球 O_n の半径 r_n を，n を用いて表せ。

(3) 球 O_n の体積を V_n とし，$S_k=V_1+V_2+\cdots+V_k$ とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_k$ を求めよ。