第1章　式と証明

$\boxed{1}$ 次の式を展開せよ。

(1)　$(2x+1)^3$

(2)　$(a+3b)(a^2-3ab+9b^2)$

$\boxed{2}$ 次の式を因数分解せよ。

(1)　x^3-8

(2)　$64p^3+125q^3$

$\boxed{3}$ (1)　$(x+1)^7$ の展開式を，二項定理を使って求めよ。

(2)　$(3a+2b)^5$ の展開式における a^2b^3 の項の係数を求めよ。

$\boxed{4}$ 次の整式 A，B について，A を B で割った商と余りを求めよ。

(1)　$A=2x^2+7x-6$，$B=x-2$

(2)　$A=x^3+5x^2-4x+2$，$B=x^2-x-1$

$\boxed{5}$ 等式 $2x^2-5x+10=(x-1)(ax+b)+c$ が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c の値を定めよ。

$\boxed{6}$ 次のような実数 x, y を求めよ。

(1) $(x-1)+(x-y)i=0$

(2) $(x+3y)+(3x-2y)i=5-18i$

$\boxed{7}$ 次の２次方程式の解の種類を判別せよ。

(1) $4x^2+7x+3=0$

(2) $3x^2-2x+5=0$

$\boxed{8}$ ２次方程式 $x^2-6x+11=0$ の２つの解を α, β とするとき，次の式の値を求めよ。

(1) $\alpha^2+\beta^2$

(2) $(\alpha-\beta)^2$

(3) $\alpha^3+\beta^3$

$\boxed{9}$ 次の式を因数分解せよ。

(1) x^3+5x^2+2x-8

(2) $6x^3-13x^2+x+2$

$\boxed{10}$ 次の方程式を解け。

(1) $x^3-13x-12=0$

(2) $x^4-11x^2+18=0$

(3) $x^3-8x+8=0$

(4) $x^3-x^2+8x+10=0$

$\boxed{11}$ 次の2点間の距離を求めよ。

(1)　$A(3,\ -2)$，$B(-1,\ 4)$　　(2)　$A(5,\ 3)$，$B(-2,\ 3)$

$\boxed{12}$ 次の2点を通る直線の方程式を求めよ。

(1)　$(-3,\ 6)$，$(9,\ 10)$　　(2)　$(-4,\ 5)$，$(-4,\ -3)$

$\boxed{13}$ 次の2つの円①，②の位置関係を調べよ。

$$x^2+y^2=9 \quad \cdots\cdots ①,\quad (x+3)^2+(y-1)^2=4 \quad \cdots\cdots ②$$

$\boxed{14}$ 次の条件を満たす点Pの軌跡を求めよ。

(1)　点 $A(-4,\ 0)$ からの距離と，点 $B(3,\ 0)$ からの距離の比が $4:3$ である点P

(2)　点Qが円 $x^2+y^2=9$ 上を動くとき，点 $A(2,\ 0)$ と点Qを結ぶ線分AQを $3:1$ に内分する点P

$\boxed{15}$ 次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1)　$\begin{cases} (x-2)^2+(y-1)^2<9 \\ y<3x-2 \end{cases}$　　(2)　$(x-y+1)(2x+y+1)<0$

16 次の関数のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。

(1) $y=\tan\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$

(2) $y=2\cos\left(3\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$

17 加法定理を用いて，次の値を求めよ。

(1) $\sin 105^\circ$

(2) $\tan\dfrac{7}{12}\pi$

(3) $\cos\dfrac{11}{12}\pi$

18 $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式を解け。

(1) $\sqrt{2}\sin 2\theta+1=0$

(2) $\cos 2\theta+\sqrt{3}\cos\theta+1=0$

19 $0\leqq x\leqq\pi$ のとき，関数 $y=\sqrt{3}\sin x-3\cos x$ の最大値，最小値を求めよ。

$\boxed{20}$ (1) $\sqrt[7]{128}$ の値を求めよ。

(2) 6乗すると729になる実数を求めよ。

$\boxed{21}$ 次の関数について，x と y の対応表の空らんをうめよ。ただし，$\sqrt{3}=1.73$ とし，小数第3位を四捨五入せよ。

(1) $y=3^x$

x	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5
y		0.33		1	1.73		

(2) $y=\log_4 x$

x		0.25					8
y	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5

$\boxed{22}$ 次の方程式，不等式を解け。

(1) $16^x=8^{3-2x}$

(2) $\log_2 x+\log_2(x-4)=5$

(3) $\log_{\frac{1}{3}} x \geqq 2$

(4) $\log_2(x-8)<3$

$\boxed{23}$ (1) 5^{30} は何桁の数か。ただし，$\log_{10}2=0.3010$ とする。

(2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{40}$ を小数で表したとき，小数第何位に初めて0でない数字が現れるか。ただし，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

$\boxed{24}$ (1)　極限値 $\lim_{h \to 2}(3h^3-4h^2+h+2)$ を求めよ。

(2)　2 次関数 $y=2x^2$ の，$x=-1$ から $x=3$ までの平均変化率を求めよ。

(3)　導関数の定義にしたがって，関数 $f(x)=x^2-5x$ の導関数を求めよ。

$\boxed{25}$ 次の関数のグラフをかけ。

(1)　$y=x^3-3x^2-9x+10$

(2)　$y=-\frac{1}{2}x^3-3x^2-6x-6$

$\boxed{26}$ (1)　関数 $y=x^3-12x-9$ のグラフ上の点 $(-1,\ 2)$ における接線の方程式を求めよ。

(2)　関数 $y=x^2+4x+5$ のグラフに点 $(2,\ -8)$ から引いた接線は 2 本ある。この 2 本の接線の方程式を求めよ。

$\boxed{27}$ (1)　定積分 $\int_{-2}^{1}(-2x^3+4x^2-x+3)dx$ を求めよ。

(2)　放物線 $y=x^2-3x+5$ と x 軸，および 2 直線 $x=1$，$x=4$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

$\boxed{28}$ $\vec{a}$，$\vec{b}$ が次のようであるとき，$3\vec{a}+5\vec{b}$，$2\vec{a}-\vec{b}$ をそれぞれ成分表示し，その大きさを求めよ。

(1)　$\vec{a}=(-1,\ 4)$，$\vec{b}=(2,\ 6)$　　(2)　$\vec{a}=(6,\ -2,\ 5)$，$\vec{b}=(-1,\ 1,\ -2)$

$\boxed{29}$ 2点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$ を結ぶ線分ABに対して，次のような点の位置ベクトルを求めよ。

(1)　5：2 に内分する点　　(2)　4：3 に外分する点　　(3)　2：3 に外分する点

$\boxed{30}$ 次の3点A，B，Pが一直線上にあるとき，点Pの座標を求めよ。

(1)　A(3, 4)，B(−2, 3)，Pは x 軸上の点

(2)　A(1, 3, 4)，B(−2, 2, 5)，Pは yz 平面上の点

$\boxed{31}$ △OABにおいて，辺OAを3：2に内分する点をC，辺OBの中点をDとし，線分ADと線分BCの交点をPとする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

$\boxed{32}$ △OABにおいて，次の式を満たす点Pの存在範囲を求めよ。

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}},\quad 3s+2t=1,\quad s\geqq 0,\quad t\geqq 0$$

$\boxed{33}$ 次のような数列 $\{a_n\}$ の一般項と，初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

(1)　初項 4，公差 3 の等差数列

(2)　初項 -2，公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列

$\boxed{34}$ 次の和を求めよ。

(1)　$\sum_{k=1}^{30} k^2$　　(2)　$\sum_{k=1}^{n} (2k-5)$　　(3)　$\sum_{k=1}^{n} (k^2+3\cdot 2^k)$

$\boxed{35}$ 次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$2,\ 5,\ 11,\ 20,\ 32,\ \cdots\cdots$

$\boxed{36}$ 初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=2n^2-3n$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$\boxed{37}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=-2,\ a_{n+1}=a_n+6$

(2)　$a_1=3,\ a_{n+1}=\frac{4}{3}a_n$

(3)　$a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+\left(\frac{1}{2}\right)^n$

1．Aさんは，整式 x^3-2x^2+3x+1 を $x-1$ で割った商と余りを求めるために，次のように考えた。

右の筆算により，商は x^2-x，余りは $2x+1$

実際，$x^3-2x^2+3x+1=(x-1)(x^2-x)+2x+1$

が成り立っている。

$$
\begin{array}{r r}
 & x^2-\ x \\ \cline{2-2}
x-1 \big) & x^3-2x^2+3x+1 \\
 & x^3-\ x^2 \\ \cline{2-2}
 & -x^2+3x+1 \\
 & -x^2+\ x \\ \cline{2-2}
 & 2x+1
\end{array}
$$

Aさんの考えは正しくない。Aさんの考えの誤っている点を述べ，正しい商と余りを求めよ。

2．(1)　$a\neq 0$ とし，$D=b^2-4ac$ とおく。このとき，2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ で与えられる。これを導け。

(2)「2次方程式 $x^2+(4+3i)x+(1+6i)=0$ は実数解をもつか」という問いについて，「$D>0$ であるから，この2次方程式は実数解をもつ」と考えたが，(1)の結果を使って解を求めると次のようになるため，誤りであることがわかった。

$$x=\frac{-{}^{ア}\boxed{}\pm\sqrt{{}^{イ}\boxed{}-{}^{ウ}\boxed{}\,i}}{{}^{エ}\boxed{}}$$

このことから，2次方程式の係数が虚数の場合，Dの値を調べる方法では実数解をもつかどうかが判別できないとわかった。

(i)　${}^{ア}\boxed{}$～${}^{エ}\boxed{}$ に当てはまる数を答えよ。

(ii)　2次方程式 $x^2+(4+3i)x+(1+6i)=0$ が実数解をもたないことを，実数解 α をもつと仮定すると矛盾が生じることにより示せ。

(3)　方程式 $(1+i)x^2-kx+(1-i)=0$ が実数解をもつような実数 k の値を求めよ。

3．(1)　2つの円 $C: x^2+y^2=25$ と円 $D: x^2+y^2+6x+8y=75$ が共有点をもつかどうかを調べるために，次の2つの方法を考えた。

【方法1】円 C と円 D について，連立方程式 $\begin{cases} x^2+y^2=25 & \cdots\cdots ① \\ x^2+y^2+6x+8y=75 & \cdots\cdots ② \end{cases}$ を考える。

【方法2】円 C の中心をC，半径を r_1 とし，円 D の中心をD，半径を r_2 とおく。
線分CDの長さを d とおき，r_1，r_2，d の関係を調べる。

【方法1】について，①と②より x^2，y^2 を消去すると，x と y の1次式
ア$\boxed{}x+$イ$\boxed{}y=$ウ$\boxed{}$ が得られる。これと①から y を消去すると，x の2次方程式
x^2-エ$\boxed{}x+$オ$\boxed{}=0$ が得られるから，共有点はカ$\boxed{}$個とわかる。
【方法2】について，$r_1=$キ$\boxed{}$，$r_2=$ク$\boxed{}$ であり，r_1，r_2，d の関係式としてケ$\boxed{}$
が成り立つから，【方法1】と同様に共有点はカ$\boxed{}$個であるとわかる。ただし，ケ$\boxed{}$
については次の⓪～⑤から最も適切なものを1つ選べ。

⓪ $d<r_1+r_2$　　① $d=r_1+r_2$　　② $d>r_1+r_2$
③ $d<|r_1-r_2|$　　④ $d=|r_1-r_2|$　　⑤ $d>|r_1-r_2|$

(2)　命題「$x^2+y^2\leqq 25$ ならば $x^2+y^2+9x+12y<100$」について，真であれば証明し，偽であれば反例をあげよ。

(3)　命題「x^2+y^2 コ$\boxed{}$25 ならば $x^2+y^2+9x+12y$ サ$\boxed{}$100」が真になるような，コ$\boxed{}$と サ$\boxed{}$に入る等号や不等号の組として適切なものを，次の⓪～⑧からすべて選べ。

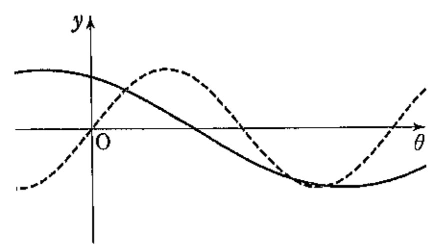
⓪	コ	$<$	サ $<$	①	コ	$\leqq$	サ $\leqq$	②	コ	$<$	サ $\leqq$
③	コ	$>$	サ $>$	④	コ	$\geqq$	サ $\geqq$	⑤	コ	$>$	サ $\geqq$
⑥	コ	$\geqq$	サ $>$	⑦	コ	$=$	サ $=$	⑧	コ	$=$	サ $\leqq$

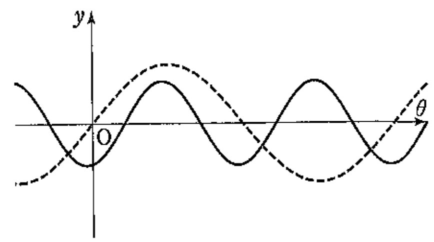
4．周期が π であり，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ のとき $y=\dfrac{1}{2}$ であるような関数 y を次の⓪～⑤からすべて選び，それに対応するグラフを(a)～(f)からそれぞれ選べ。また，選んだ関数について，$\theta=\pi$ のときの y の値をそれぞれ求めよ。ただし，(a)～(d)には $y=\sin\theta$ のグラフを，(e)，(f)には $y=\tan\theta$ のグラフをそれぞれ点線で示している。

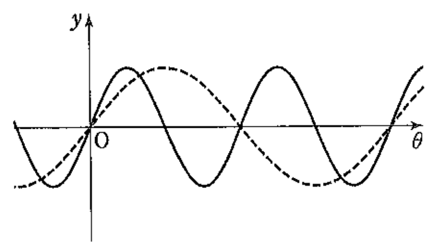
⓪ $y=\sin 2\theta$　　① $y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(2\theta-\dfrac{5}{12}\pi\right)$

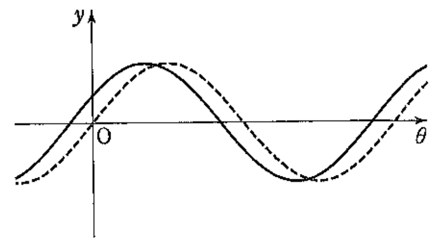
② $y=\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$　　③ $y=\cos\left(\dfrac{1}{2}\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)$

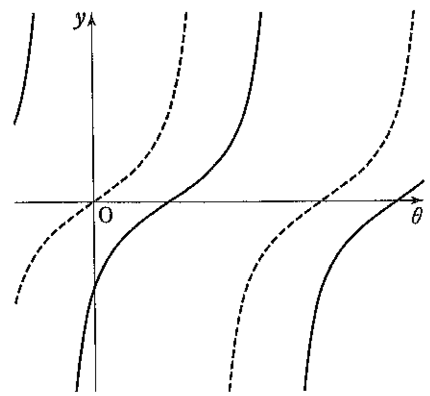
④ $y=\tan\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$　　⑤ $y=\dfrac{1}{2}\tan\left(\theta-\dfrac{\pi}{12}\right)$

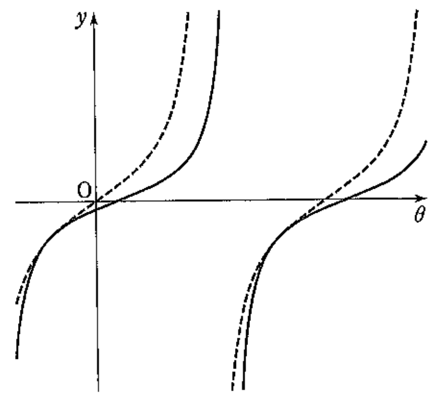
(a)


(b)


(c)


(d)


(e)


(f)


5．地震の大きさをどのように表現するかは重要な問題である。ゆれの大きさを表す「震度」は場所によって値が異なるため，「マグニチュード」を用いて地震の統一的な規模を表すのが一般的である。マグニチュードMと地震のエネルギーEとの間には $\log_{10}E=4.8+1.5M$ という関係がある。

(1) マグニチュード 7.3 の地震のエネルギーを 10 進法で表したとき，それは何桁の数か。

(2) マグニチュードが 1 増加すると，地震のエネルギーはおよそ何倍になるか。次の⓪～⑤から最も近いものを 1 つ選べ。

⓪ 1.5 倍　① 3.1 倍　② 15 倍　③ 31 倍　④ 150 倍　⑤ 310 倍

(3) 地震のエネルギーが $1.0\times10^{10}<E<2.0\times10^{10}$ となるようなマグニチュードの範囲は ア$\boxed{}<M<$ イ$\boxed{}$ である。ただし，$\log_{10}2=0.3010$ とし，小数第 2 位を四捨五入せよ。

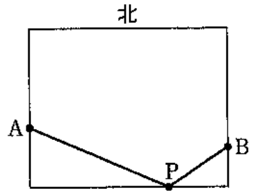
6．3 次関数 $f(x)=px^3+qx^2+rx+s$ は次の条件 (a)，(b) を満たすとする。

(a) 導関数 $y=f'(x)$ のグラフは上に凸の放物線で，x 軸と異なる 2 点 $(\alpha,\ 0)$，$(\beta,\ 0)$ で交わり，その頂点は第 1 象限にある。

(b) $\alpha>1$，$\beta<-1$ であり，点 $(\alpha,\ f(\alpha))$ は第 4 象限にある。

このとき，$f(x)$ の係数 p，q，r，s の値が正か，0 か，負かをそれぞれ答えよ。

7．ひとり暮らしを始めたXさんは，部屋の中にロープを張り，洗濯物を干せるようにしたいと考えた。部屋は南北が 4 m，東西が 5 m，天井高が 2 m 50 cm の直方体であり，東西の壁に 1 つずつフック A，B があったので，それを活用することにした。ただし，ロープが部屋の真ん中を通ると生活に支障をきたすため，南側の壁の点 P に新たなフックを取り付け，そこを経由させることにした。フック A は西側の壁の天井から 50 cm，南から 1 m 50 cm のところにあり，フック B は東側の壁の天井から 10 cm，南から 1 m のところにある。ロープが最も短くなるときの点 P の位置を答えよ。

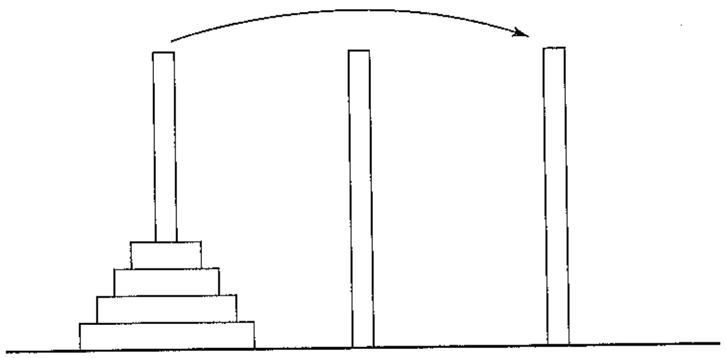


真上から見た図

8．ハノイの塔というパズルがある。このパズルは，次のルールに従って円盤を移動させていき，すべての円盤を右端の杭に移動できれば成功である。

- 3 本の杭と，中央に穴の開いた大きさの異なる複数の円盤を使う。
- 最初はすべての円盤が左端の杭にはまっている。円盤は小さいものが上になるように順に積み重ねられている。
- 1 枚の円盤を，その時点ではまっている杭から別の杭に移動させると，手数が 1 カウントされる。
- 小さな円盤の上に大きな円盤をのせることはできない。

n 枚の円盤を使うときに，最初の状態からすべての円盤を右端の杭に移動させる最小の手数を a_n とする。



(1)　a_2，a_3 を求めよ。

(2)　a_{n+1} を a_n を用いて表し，a_n を求めよ。